

Feladatok sorozatokra

1. Vizsgáljuk a $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozatot monotonitás, korlátosság, konvergencia szempontjából, ha

$$\begin{array}{lll} a) x_n = 1 + \frac{1}{n}; & b) x_n = 5; & c) x_n = -1 + \frac{1}{2^n}; \\ d) x_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n; & e) x_n = \log_2 n; & f) x_n = (-2)^n; \\ g) x_n = -n^3; & h) x_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ 2, & \text{ha } n \text{ páros;} \end{cases} & i) x_n = 10^n; \\ j) x_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } n \leq 100, \\ 2, & \text{ha } n > 100. \end{cases} & & \end{array}$$

2. Mi a határérték?

$$\begin{array}{ll} a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+11}{n-2} =? & b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n^2-20} =? \\ c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3+11}{n^2+3n} =? & d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2-n}{n+6} =? \\ e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+11}{n^4+n^3} =? & f) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+11}{n-2} + \frac{n}{n^5+2}\right) =? \\ g) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+2n}}{1+\sqrt{n}} =? & h) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+n^2}}{n} =? \\ i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{1+n^2}}{1+\sqrt{16n}} =? & j) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) =? \\ k) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) =? & l) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}} =? \end{array}$$

3. Egy rovarpopuláció nőstény egyedinek számát az n -dik generációban az $a_n = [fr(1-m)]^n a_0$ egyenlet adja, ahol a m a fiatal egyedek halálozási arányát jelöli, f egy átlagos nőstény utódainak száma, r pedig a nőstény rovarok aránya a populációban.

- a) Legyen $m = 0,8$ és $r = 0,5$. Hogyan válasszuk f -et, hogy a populáció ne haljon ki?
b) Adjunk általános feltételt arra, hogy adott m és r esetén milyen f termékenységi mutató biztosítja, hogy a populáció ne csökkenjen.

4. Egy populáció egyedszáma minden évben q -szorososa az előző évinek ($q > 0$). Az első évben az egyedszám $x_1 > 0$. Elérhető-e q alkalmas választásával, hogy az egyedszám $2x_1$ -hez konvergáljon, midőn az évek száma végtelenhez tart?

5. Gyógyszeradagolási probléma. Egy beteg minden reggel kap egy adott gyógyszerből 4 tablettát (4 dózist). A hatóanyag $2/3$ -a elbomlik 24 óra alatt. Határozzuk meg tetszőleges $n \geq 1$ -re, hogy mennyi hatóanyag van a beteg szervezetében az n -dik napon, ha korábban nem kapott a gyógyszerből (azaz ha $x_0 = 0$)! Mi a szervezetben található hatóanyag mennyiségének határértéke, ha a napok száma tart a végtelenbe?

6.*

a) Teljes indukcióval igazoljuk, hogy az $x_{n+1} = ax_n + b$ ($a > 0$, $a \neq 1$ és $b > 0$ paraméterek, x_0 adott) probléma megoldása az az $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat, ahol minden $n \geq 0$ -ra $x_n = x_0 a^n + b \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

b) Az $a = 1$ eset. Teljes indukcióval igazoljuk, hogy az $x_{n+1} = x_n + b$ ($b > 0$ paraméter, x_0 adott) probléma megoldása az az $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat, ahol minden $n \geq 0$ -ra $x_n = x_0 + nb$.

Megoldások

1. a) korlátos, szig. mon. csökken, $\lim x_n = 1$; b) korlátos, monoton nő és mon. csökken, $\lim x_n = 5$; c) korlátos, szig. mon. csökken, $\lim x_n = -1$; d) korlátos, nem monoton, $\lim x_n = 0$; e) alulról korlátos, felülről nem korlátos, szig. mon. nő, $\lim x_n = \infty$; f) alulról nem korlátos, felülről nem korlátos, nem monoton, nincs határértéke, azaz divergens; g) felülről korlátos, alulról nem korlátos, szig. mon. csökken, $\lim x_n = -\infty$; h) korlátos, nem monoton, divergens; i) szig. monoton nő, alulról korlátos, felülről nem korlátos, $\lim x_n = \infty$; j) korlátos, monoton nő (nem szigorúan), $\lim x_n = 2$.

2. a) 4; b) 1; c) ∞ ; d) $-\infty$; e) 0; f) 4; g) $\sqrt{2}$; h) 1; i) $1/4$; j) 0; k) 1; l) $+\infty$

3. Mivel $a_n > 0$ (az $a_n = 0$ eset nem érdekes, $a_n < 0$ -nak a példában nincs értelme), az $fr(1-m)$ kifejezés is pozitív. Ismert: Ha $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\lambda > 1$, akkor az $x_n = \lambda^n$ sorozat szig. mon nő és $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n = \infty$. Ha $\lambda = 1$, akkor az $x_n = \lambda^n$ a konstans 1 sorozat. Ha $0 < \lambda < 1$, akkor az $x_n = \lambda^n$ sorozat szig. mon csökken és $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n = 0$. Tehát a populáció nem csökken pontosan akkor, ha $fr(1-m) \geq 1$. Innen a) $f \geq 10$; b) $f \geq 1/(r(1-m))$.

4. Nem. Az egyedszám az $(n+1)$ -dik évben $x_{n+1} = q^n x_1$. Ha $0 < q < 1$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n x_1 = 0$, ha $q = 1$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n x_1 = x_1$, és ha $q > 1$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n x_1 = \infty$.

5. A feladat szerint $x_0 = 0$ és minden $n \geq 0$ -ra $x_{n+1} = \frac{x_n}{3} + 4$. Ebből igazolható, hogy $x_n = 6 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\}$ minden $n \geq 1$ -re (lásd hasonló példa gyakorlaton). Hosszú távú viselkedés: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 6 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\} = 6$.