Feladatok sorozatokra

1. Vizsgáljuk a $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozatot monotonitás, korlátosság, konvergencia szempontjából, ha

$a)$ $x_n = 1 + \frac{1}{n}$; $b)$ $x_n = 5$; $c)$ $x_n = -1 + \frac{1}{2^n}$;
$d)$ $x_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$; $e)$ $x_n = \log_2 n$; $f)$ $x_n = (-2)^n$;
$g)$ $x_n = -n^3$; $h)$ $x_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } n \text{ páratlan}, \\ 2, & \text{ha } n \text{ páros}; \end{cases}$ $i)$ $x_n = 10^n$;
$j)$ $x_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } n \leq 100, \\ 2, & \text{ha } n > 100. \end{cases}$

2. Mi a határérték?

$a)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{4n+11}{n-2} = ?$ $b)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2-20} = ?$
$c)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{4n^3+11}{n^2+3n} = ?$ $d)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{-n^2-n}{n+6} = ?$
$e)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{4n+11}{n^4+n^3} = ?$ $f)$ $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n+11}{n-2} + \frac{n}{n^5+2}\right) = ?$
$g)^*$ $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+2n}}{1+\sqrt{n}} = ?$ $h)^*$ $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+n^2}}{n} = ?$
$i)^*$ $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{1+n^2}}{1+\sqrt{16n}} = ?$ $j)$ $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = ?$
$k)$ $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right) = ?$ $l)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}} = ?$

3. További példák gyakorláshoz.

$a)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{n+6} = ?$ $b)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{5n^2-20} = ?$
$c)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{-n^3+2n+11}{n^2+3n} = ?$ $d)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{n^4+6} = ?$
$e)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{4n+11}{n^4+4} = ?$ $f)^*$ $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} = ?$
$g)^*$ $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+2n}}{1+n} = ?$ $h)^*$ $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2}}{n-1} = ?$
$i)^*$ $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^6+2}}{n-1} = ?$ $j)$ $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right) = ?$
$k)$ $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1} - n\right) = ?$ $l)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{2n} = ?$

4. Egy rovarpopuláció nőstény egyedinek számát az n-dik generációban az $a_n = [fr\,(1-m)]^n\,a_0$ egyenlet adja, ahol a m a fiatal egyedek halálozási arányát jelöli, f egy átlagos nőstény utódainak száma, r pedig a nőstény rovarok aránya a populációban.

a) Legyen $m = 0,8$ és $r = 0,5$. Hogyan válasszuk f-et, hogy a populáció ne csökkenjen?

b) Adjunk általános feltételt arra, hogy adott m és r esetén milyen f termékenységi mutató biztosítja, hogy a populáció ne csökkenjen.

5. Egy populáció egyedszáma minden évben q-szorosa az előző évinek ($q > 0$). Az első évben az egyedszám $x_1 > 0$. Elérhető-e q alkalmas választásával, hogy az egyedszám $2x_1$-hez konvergáljon, midőn az évek száma végtelenhez tart?

6. Gyógyszeradagolási probléma. Egy beteg minden reggel kap egy adott gyógyszerből 4 tablettát (4 dózist). A hatóanyag 2/3-a elbomlik 24 óra alatt. Határozzuk meg tetszőleges $n \geq 1$-re, hogy mennyi hatóanyag van a beteg szervezetében az n-dik napon, ha korábban nem kapott a gyógyszerből (azaz ha $x_0 = 0$)! Mi a szervezetben található hatóanyag mennyiségének határértéke, ha a napok száma tart a végtelenbe?

7. Gyógyszeradagolási probléma. Gyógykezelésének kezdetén egy beteg egy adott gyógyszerből 10 tablettát (10 dózist) kap, majd ezután minden reggel kap 2 tablettát (2 dózist). A hatóanyag fele elbomlik 24 óra alatt. Határozzuk meg tetszőleges $n \geq 1$-re, hogy mennyi hatóanyag van a szervezetében az n-dik napon! Mi a hatóanyag mennyiségének határértéke, ha a napok száma tart a végtelenbe?

8.*

a) Teljes indukcióval igazoljuk, hogy az $x_{n+1} = ax_n + b$ ($a > 0$, $a \neq 1$ és $b > 0$ paraméterek, x_0 adott) probléma megoldása az az $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat, ahol minden $n \geq 0$-ra $x_n = x_0 a^n + b\frac{1-a^n}{1-a}$.

b) Az $a = 1$ eset. Teljes indukcióval igazoljuk, hogy az $x_{n+1} = x_n + b$ ($b > 0$ paraméter, x_0 adott) probléma megoldása az az $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat, ahol minden $n \geq 0$-ra $x_n = x_0 + nb$.

Megoldások

1.*a*) korlátos, szig. mon. csökken, $\lim x_n = 1$; *b*) korlátos, monoton nő és mon. csökken, $\lim x_n = 5$; *c*) korlátos, szig. mon. csökken, $\lim x_n = -1$; *d*) korlátos, nem monoton, $\lim x_n = 0$; *e*) alulról korlátos, felülről nem korlátos, szig. mon. nő, $\lim x_n = \infty$; *f*) alulról nem korlátos, felülről nem korlátos, nem monoton, nincs határértéke, azaz divergens; *g*) felülről korlátos, alulról nem korlátos, szig. mon. csökken, $\lim x_n = -\infty$; *h*) korlátos, nem monoton, divergens; *i*) szig. monoton nő, alulról korlátos, felülről nem korlátos, $\lim x_n = \infty$; *j*) korlátos, monoton nő (nem szigorúan), $\lim x_n = 2$.

2.*a*) 4; *b*) 1; *c*) ∞; *d*) $-\infty$; *e*) 0; *f*) 4; *g*) $\sqrt{2}$; *h*) 1; *i*) 1/4; *j*) 0; *k*) 1; *l*) $+\infty$.

3.*a*) ∞; *b*) 1/5; *c*) $-\infty$; *d*) 0; *e*) 0; *f*) 1; *g*) 0; *h*) 0; *i*) ∞; *j*) 0; *k*) 1/2; *l*) 0.

4. Mivel $a_n > 0$ (az $a_n = 0$ eset nem érdekes, $a_n < 0$-nak a példában nincs értelme), az $fr(1-m)$ kifejezés is pozitív. Ismert: Ha $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\lambda > 1$, akkor az $x_n = \lambda^n$ sorozat szig. mon nő és $\lim_{n\to\infty} \lambda^n = \infty$. Ha $\lambda = 1$, akkor az $x_n = \lambda^n$ a konstans 1 sorozat. Ha $0 < \lambda < 1$, akkor az $x_n = \lambda^n$ sorozat szig. mon csökken és $\lim_{n\to\infty} \lambda^n = 0$. Tehát a populáció nem csökken pontosan akkor, ha $fr(1-m) \geq 1$. Innen *a*) $f \geq 10$; *b*) $f \geq 1/(r(1-m))$.

5. Nem. Az egyedszám az $(n+1)$-dik évben $x_{n+1} = q^n x_1$. Ha $0 < q < 1$, akkor $\lim_{n\to\infty} q^n x_1 = 0$, ha $q = 1$, akkor $\lim_{n\to\infty} q^n x_1 = x_1$, és ha $q > 1$, akkor $\lim_{n\to\infty} q^n x_1 = \infty$.

6. A feladat szerint $x_0 = 0$ és minden $n \geq 0$-ra $x_{n+1} = \frac{x_n}{3} + 4$. Ebből igazolható, hogy $x_n = 6\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$ minden $n \geq 1$-re (lásd hasonló példa előadáson). Hosszú távú viselkedés: $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} 6\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} = 6$.

7. $x_n = 10\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$, $\lim_{n\to\infty} x_n = 4$.