Nemlineáris rendszerek vizsgálata

1. Határozzuk meg az egyensúlyi helyzeteket és azok stabilitását az alábbi rendszerek esetén.

$$
\begin{aligned}
(a):\ x_{n+1} &= x_n\left(\frac{3}{2} - x_n - y_n\right), \\
y_{n+1} &= y_n\left(\frac{1}{3} + x_n\right);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(b):\ x_{n+1} &= x_n y_n^2, \\
y_{n+1} &= 2\frac{y_n}{1+x_n}.
\end{aligned}
$$

2.* Keressük meg az alábbi rendszer *nemnegatív* egyensúlyi helyzetit és mutassuk meg, hogy ezek instabilak, ha $\alpha > 0$, $\beta > 0$ és $\gamma > \delta > 0$:

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= \alpha x_n y_n^{\beta}, \\
y_{n+1} &= \gamma\frac{y_n}{\delta + x_n}.
\end{aligned}
$$

Megoldások:

2. (a) $f(x,y) = 1,5x - x^2 - xy$, $g(x,y) = y/3 + xy$,

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - 2x - y & -x \\ y & \frac{1}{3} + x \end{pmatrix},$$

$(0,0)$ instabil, $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ stabil, $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}\right)$ instabil.

(b) $f(x,y) = xy^2$, $g(x,y) = 2\frac{y}{1+x}$,

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ \frac{-2y}{(1+x)^2} & \frac{2}{1+x} \end{pmatrix},$$

$(0,0)$ instabil, $(1,1)$ instabil, $(1,-1)$ instabil.

3. $f(x,y) = \alpha x y^\beta$, $g(x,y) = \gamma\frac{y}{\delta + x}$, egyensúlyi helyzetek: $(0,0)$ és $\left(\gamma - \delta, \alpha^{-\frac{1}{\beta}}\right) = \left(\gamma - \delta, \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right)$;
Jacobi mátrix:

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha y^\beta & \alpha\beta x y^{\beta-1} \\ \frac{-\gamma y}{(\delta+x)^2} & \frac{\gamma}{\delta+x} \end{pmatrix},$$

$(0,0)$ stabilitása:

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma}{\delta} \end{pmatrix},$$

$\det(J) = 0$, $\mathrm{Tr}(J) = \frac{\gamma}{\delta} > 1 \Rightarrow \mathrm{Tr}(J) > 1 + \det(J) \Rightarrow (0,0)$ instabil;

$\left(\gamma - \delta, \alpha^{-\frac{1}{\beta}}\right)$ stabilitása:

$$J\left(\gamma - \delta, \alpha^{-\frac{1}{\beta}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha^{\frac{1}{\beta}}\beta(\gamma - \delta) \\ -\frac{1}{\gamma}\alpha^{-\frac{1}{\beta}} & 1 \end{pmatrix},$$

$\det(J) = 1 + \frac{\beta(\gamma-\delta)}{\gamma} > 1 \Rightarrow$ instabil.