Nemlineáris differenciaegyenletek

1. Határozzuk meg az

$$(a) \quad x_{n+1} = x_n\,(2 - x_n)\,, \qquad (b) \quad x_{n+1} = \tfrac{1}{2+x_n}$$

differenciaegyenlet egyensúlyi helyzeteit. Adjuk meg a kapott egyensúlyi helyzetek stabilitását kétféle módon:

- vázoljuk az
  (a) $f(x) = x(2-x)$ függvény grafikonját (parabola)
  (b) az $f_0(x) = \frac{1}{x}$, majd ez alapján az $f\,(x) = \frac{1}{2+x}$ függvény grafikonját (hiperbola)
  és alkalmazzuk a pókháló módszert;
- tekintsük f differenciálhányadosának abszolútértékét f fixpontjaiban.

2. Vizsgáljuk az

$$(a) \quad x_{n+1} = \tfrac{x_n}{2}\,(1 + x_n)^2\,, \qquad (b) \quad x_{n+1} = 4x_n\,(2 - x_n)^2$$

differenciaegyenlet egyensúlyi helyzeteinek stabilitását a derivált segítségével.

3. Tekintsük az

$$N_{t+1} = N_t e^{r\left(1-\frac{N_t}{K}\right)}$$

differenciaegyenletet, ahol $N_t \geq 0$ a populáció mérete a t-dik generációban, $K > 0$ a maximális egyedszám, amit a környezet eltart, $r > 0$ konstans. Az $e^{r\left(1-\frac{N_t}{K}\right)}$ tényező mutatja, hogy a szaporodás lelassul, ha N_t megközelíti $K-$t.

(a) Mutassuk meg, hogy $\bar{N} = K$ egyensúlyi helyzete az egyenletnek. Milyen paraméterválasztás mellett lesz $\bar{N}$ aszimptotikusan stabil?

(b) Mutassuk meg, hogy a populáció pontosan addig nő, amíg a mérete K alatt marad (azaz $N_{t+1} > N_t$ pontosan akkor teljesül, ha $N_t < K$). Feltehető, hogy $N_t > 0$.

4. Határozzuk meg az

$$\begin{aligned} (a) \quad x_{n+1} &= \frac{ax_n}{b + x_n}, \quad a > 0,\ b > 0, \\ (b) \quad x_{n+1} &= r - x_n^2, \quad r > 0, \\ (c) \quad x_{n+1} &= ax_n e^{-x_n} + bx_n, \quad a > 0,\ 0 < b < 1 \end{aligned}$$

differenciaegyenlet egyensúlyi helyzeteit és azok stabilitását az a és b illetve r paraméterek függvényében.

5. (a) Varley–Gradwell–Hassel modell rovarpopulciókra (1973):

$$N_{t+1} = \lambda N_t \frac{1}{\alpha N_t^b}.$$

N_t a populáció sűrűsége a t-dik generációban, $\lambda > 1$ a szaporodási ráta, $a > 0$, $b > 0$ konstansok. A λN_t tag a szaporulat, az $1/\left(\alpha N_t^b\right)$ tag adja meg, hogy a fiatal egyedek hányadrésze éri meg a felnőtt kort. Határozzuk meg az egyensúlyi helyzeteket és vizsgáljuk a nemtriviális egyensúlyi helyzet stabilitásást!

$(b)^*$ Az előző modellel az a probléma, hogy ha N_t kicsi, akkor a túlélési ráta, $1/\left(\alpha N_t^b\right)$ nagyobb 1-nél, ami biológiailag értelmetlen. Hassell 1975-ben javasolta az alábbi módosítást:

$$N_{t+1} = \lambda N_t \frac{1}{\left(1 + \alpha N_t\right)^b}.$$

Itt is N_t a populáció sűrűsége a t-dik generációban, $\lambda > 1$ a szaporodási ráta, $a > 0$, $b > 0$ konstansok. Határozzuk meg az egyensúlyi helyzeteket és vizsgáljuk a nemtriviális egyensúlyi helyzet stabilitásást!

6. Populációdinamikából ismert az

$$x_{n+1} = r x_n \left(1 - x_n\right)$$

diszkrét logisztikus egyenlet.

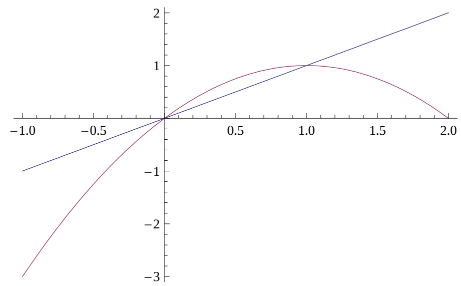
(a) Legyen $r > 1$. Keressük az egyensúlyi helyzeteket és azok stabilitását.

$(b)^*$ Mivel $r = 3$-ban a nemtriviális egyensúlyi helyzet elveszíti stabilitását, keressünk $r > 3$ esetén 2-periodikus megoldásokat. Segítség: az $x = r^2 x(1-x)\left(1 - rx(1-x)\right)$ egyenlet átrendezhető a következő alakúra:

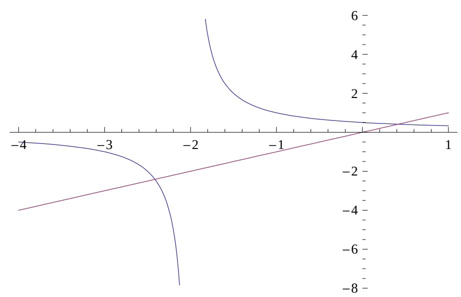
$$x\left[rx - (r-1)\right]\left[r^2x^2 - r\left(r+1\right)x + r + 1\right] = 0.$$

Megoldások

1. (a) Két egyensúlyi helyzet van: $\bar{x}_1 = 0$ és $\bar{x}_2 = 1$; $\bar{x}_1$ instabil, $\bar{x}_2$ aszimptotikusan stabil. Megjegyzés: a következő ábrán kell a pókháló módszert alkalmazni:



1. (b) Két egyensúlyi helyzet van: $\bar{x}_1 = -1 + \sqrt{2}$ és $\bar{x}_2 = -1 - \sqrt{2}$, $\bar{x}_1$ aszimptotikusan stabil, $\bar{x}_2$ instabil. A következő ábrán kell a pókháló módszert alkalmazni:



2. (a) Három egyensúlyi helyzet van: $\bar{x}_0 = 0$ aszimtotikusan stabil, $\bar{x}_1 = -1 + \sqrt{2}$ instabil, továbbá $\bar{x}_2 = -1 - \sqrt{2}$ instabil.

2. (b) Három egyensúlyi helyzet van: $\bar{x}_0 = 0$ instabil, $\bar{x}_1 = 1,5$ instabil, $\bar{x}_2 = 2,5$ instabil.

3. (a) Az egyenletbe való behelyettesítéssel az első állítás ellenőrizhető. Stabilitás:

$$f(x) = xe^{r\left(1-\frac{x}{K}\right)} = xe^{r-\frac{r}{K}x} \Rightarrow \quad f'(x) = \left(1 - \frac{r}{K}x\right) e^{r\left(1-\frac{x}{K}\right)} \Rightarrow \quad f'(K) = 1 - r$$

alapján $\bar{N} = K$ aszimptotikusan stabil, ha $|1-r| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 - r < 1 \Leftrightarrow 0 < r < 2$.

(b)

$$N_{t+1} > N_t \;\Leftrightarrow\; \frac{N_{t+1}}{N_t} > 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{N_t e^{r\left(1-\frac{N_t}{K}\right)}}{N_t} > 1 \;\Leftrightarrow$$

$$e^{r\left(1-\frac{N_t}{K}\right)} > 1 \;\Leftrightarrow\; e^{r\left(1-\frac{N_t}{K}\right)} > e^0 \;\Leftrightarrow\; r\left(1 - \frac{N_t}{K}\right) > 0.$$

Mivel $r > 0$, ez pontosan akkor teljesül, ha

$$1 - \frac{N_t}{K} > 0 \;\Leftrightarrow\; K > N_t.$$

4. (a) Egyensúlyi helyzetek: $\bar{x}_1 = 0$ és $\bar{x}_2 = a - b$. Most

$$f(x) = \frac{ax}{b+x} \quad \text{és} \quad f'(x) = \frac{ab}{(b+x)^2}.$$

Mivel $f'(0) = a/b$, $\bar{x}_1$ aszimptotikusan stabil, ha $-1 < a/b < 1$. Az a és b paraméterek pozitívitása miatt az első egyenlőtlenség mindig teljesül. Tehát $\bar{x}_1$ aszimptotikusan stabil, ha $a/b < 1 \Longleftrightarrow a < b$. $\bar{x}_1$ instabil, ha $a/b > 1$ vagy $a/b < -1$. Mivel a és b is pozitív, a második egyenlőtlenség sosem teljesülhet. Tehát $\bar{x}_1$ instabil $a > b$ esetén. Az $a = b$ esetben nincs információnk a stabilitásról.

Hasonlóan megmutatható: $\bar{x}_2$ aszimptotikusan stabil, ha $a > b$ és instabil, ha $a < b$. Az $a = b$ esetben megint nincs információnk a stabilitásról.

4.(b) Egyensúlyi helyzetek:

$$\bar{x}_1 = \frac{-1 - \sqrt{1+4r}}{2} \quad \text{és} \quad \bar{x}_2 = \frac{-1 + \sqrt{1+4r}}{2}.$$

Most $f(x) = r - x^2$ és $f'(x) = -2x$. Innen $f'(\bar{x}_1) = 1 + \sqrt{1+4r} > 1$ adódik, ezért $\bar{x}_1$ instabil. Másrészt $f'(\bar{x}_2) = 1 - \sqrt{1+4r}$. Tehát $\bar{x}_2$ aszimptotikusan stabil, ha $-1 < 1 - \sqrt{1+4r} < 1$ $\Leftrightarrow$ $-2 < -\sqrt{1+4r} < 0$. A második egyenlőtlenség mindig teljesül. Az elsőből jön: $\bar{x}_2$ aszimptotikusan stabil, ha $2 > \sqrt{1+4r} \Leftrightarrow 4 > 1 + 4r \Leftrightarrow r < 3/4$. Az $\bar{x}_2$ egyensúlyi helyzet instabil, ha $1 - \sqrt{1+4r} > 1$ vagy $1 - \sqrt{1+4r} < -1$. Ez $r > 3/4$ esetén fordul elő.

4.(c) Egyensúlyi helyzetek:

$$\bar{x}_1 = 0 \text{ és } \bar{x}_2 = -\ln\frac{1-b}{a} = \ln\frac{a}{1-b}.$$

Most $f(x) = axe^{-x} + bx$, $f'(x) = ae^{-x}(1-x) + b$ és

$$f'(\bar{x}_1) = a + b \text{ illetve } f'(\bar{x}_2) = (1-b)\left(1 + \ln\frac{1-b}{a}\right) + b = (1-b)\ln\frac{1-b}{a} + 1.$$

Azt kapjuk, hogy $\bar{x}_1$ aszimptotikusan stabil, ha $-1 < a + b < 1$. Mivel a és b is pozitív, az első egyenlőtlenség mindig teljesül. Tehát $\bar{x}_1$ aszimptotikusan stabil, ha $a + b < 1$. $\bar{x}_1$ instabil, ha $a + b > 1$ vagy $a + b < -1$. Mivel a és b is pozitív, a második egyenlőtlenség sosem teljesül. Tehát $\bar{x}_1$ instabil, ha $a + b > 1$. Az $a + b = 1$ esetben nem tudjuk eldönteni a stabilitást.

Másrészt $\bar{x}_2$ aszimptotikusan stabil, ha

$$-1 < (1-b)\ln\frac{1-b}{a} + 1 < 1 \Longleftrightarrow -2 < (1-b)\ln\frac{1-b}{a} < 0,$$

és instabil, ha

$$(1-b)\ln\frac{1-b}{a} > 0 \text{ vagy } (1-b)\ln\frac{1-b}{a} < -2.$$

5. (a) Egy egyensúlyi helyzet van: $\bar{N} = \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{1/b}$. Itt

$$f(x) = \lambda x \frac{1}{\alpha x^b} = \frac{\lambda}{\alpha} x^{1-b} \quad \text{és} \quad f'(x) = \frac{\lambda}{\alpha}(1-b)\, x^{-b} = \frac{\lambda}{\alpha}(1-b)\frac{1}{x^b}.$$

Behelyettesítéssel $f'(\bar{N}) = 1 - b$ adódik. Tehát $\bar{N}$ aszimptotikusan stabil, ha $|1-b| < 1$, azaz $0 < b < 2$, és instabil, ha $|1-b| > 1$, azaz $b > 2$. A $b = 2$ esetről nincs információnk.

5. (b) Két egyensúlyi helyzet van: $\bar{N}_0 = 0$ és

$$\bar{N}_1 = \frac{\lambda^{1/b} - 1}{\alpha}.$$

Most

$$f(x) = \frac{\lambda x}{(1+\alpha x)^b} \quad \text{és} \quad f'(x) = \frac{\lambda - \lambda x b\,(1+\alpha x)^{-1}\alpha}{(1+\alpha x)^b}.$$

Behelyettesítéssel kapjuk, hogy

$$f'(\bar{N}_1) = 1 - b\left(1 - \lambda^{-\frac{1}{b}}\right).$$

Tehát $\bar{N}_1$ aszimptotikusan stabil, ha

$$-1 < 1 - b\left(1 - \lambda^{-\frac{1}{b}}\right) < 1, \quad \text{azaz} \quad 0 < b\left(1 - \lambda^{-\frac{1}{b}}\right) < 2.$$

6. (a) A triviális egyensúlyi helyzet, $\bar{x} = 0$ bármilyen $r > 1$ estén instabil. A másik egyensúlyi helyzet, $\bar{x} = (r-1)/r$ aszimptotikusan stabil, ha $1 < r < 3$, és instabil, ha $r > 3$.

(b) nemtriviális 2-periodikus megoldások: $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2, ...$ és $\bar{x}_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_1, ...$, ahol

$$\bar{x}_{1,2} = \frac{r + 1 \pm \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}.$$