Minta zárthelyi dolgozat

1. Adjuk meg a differenciálhányadosát: $f(x) = 4e^{x \ln x}$, $g(x) = \sqrt{2(1-x^2)}$, $h(x) = \ln \frac{3x+2}{x^2} + 11$, $i(x) = x \tan \sqrt[3]{x}$, $j(x) = \cos(3\pi) x^2$.

2. Határozzuk meg a parciális deriváltakat: $f(x,y) = 2xy^2 + 3x - y$, $g(x,y) = \sin(xy) + 3x$, $h(x,y) = \frac{2x}{y^2+1} + x \cos y$.

3. Adjuk meg az

$$x_{n+1} = \frac{3x_n}{2 + x_n^2}$$

egyenlet egyensúlyi helyzeteit és vizsgáljuk azok stabilitását.

4. Adjuk meg az

$$x_{n+1} = \frac{2px_n}{p + x_n^2}$$

egyenlet egyensúlyi helyzeteit és vizsgáljuk azok stabilitását, ha $p > 0$ paraméter.

5. Ragadozó-zsákmány modell. Határozzuk meg az egyensúlyi helyzeteket és azok stabilitását az alábbi rendszer esetén.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n (2 - x_n - y_n), \\ y_{n+1} &= y_n \left(\frac{1}{2} + x_n \right). \end{aligned}$$

6. Egy alkalmassági vizsgálat tapasztalatai szerint a vizsgált személyeken $0,05$ valószínűséggel mozgásszervi és $0,03$ valószínűséggel érzékszervi rendellenesség figyelhető meg. A mozgásszervi rendellenességgel rendelkező emberek 20%-ának érzékszervi rendellenessége is van.

(a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy találomra kiválasztott személyen legalább az egyik rendellenesség megfigyelhető?

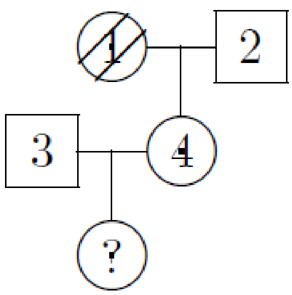
(b) Független-e a két rendellenesség?

(c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy találomra kiválasztott személy mozgásszervi rendellenességben szenved, de érzékszerviben nem?

7. Autoszómás recesszíven öröklődő betegséget vizsgálunk az alábbi családfán. Az (2), (3) és (4) személyek egészséges fenotípusúak, (1) beteg. Tudjuk, hogy az egészséges felnőtt lakosság 7%-a hordozó (Aa).

(a) Mi a valószínűsége annak, hogy (3) és (4) szülők első gyermeke nem beteg?

(b) Mi a valószínűsége annak, hogy (3) hordozó annak ismeretében, hogy (4) két egészséges gyermeket szült neki, akik között nincsenek egypetejű ikrek?



Megoldások

1. $f'(x) = 4e^{x \ln x}\left(\ln x + x\frac{1}{x}\right) = 4e^{x\ln x}(\ln x + 1)$,

$g'(x) = \frac{1}{2}\left(2\left(1-x^2\right)\right)^{-\frac{1}{2}}(-4x)$,

$h'(x) = \frac{x^2}{3x+2}\frac{3x^2-(3x+2)2x}{x^4}$,

$i'(x) = \tan\sqrt[3]{x} + x\frac{1}{\left(\cos\sqrt[3]{x}\right)^2}\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$,

$j'(x) = \cos(3\pi)\cdot 2x$.

2. $f'_x(x,y) = 2y^2+3$, $f'_y(x,y) = 4xy-1$,

$g'_x(x,y) = \cos(xy)\cdot y + 3$, $g'_y(x,y) = \cos(xy)\cdot x$,

$h'_x(x,y) = \frac{2}{y^2+1} + \cos y$, $h'_x(x,y) = \frac{-4xy}{(y^2+1)^2} + x(-\sin y)$.

3. Egyensúlyi helyzetek: $0, 1, -1$. A derivált segítségével vizsgáljuk a stabilitást. Itt

$$f(x) = \frac{3x}{2+x^2},\ \text{így}\ f'(x) = \frac{3\left(2+x^2\right) - 3x\cdot 2x}{\left(2+x^2\right)^2} = \frac{6-3x^2}{\left(2+x^2\right)^2}.$$

Mivel $f'(0) = 6/4$, a 0 instabil. Mivel $f'(1) = f'(-1) = 3/9$, a másik két egyensúlyi helyzet aszimptotikusan stabil.

4. Egyensúlyi helyzetek: $0, \sqrt{p}, -\sqrt{p}$! A derivált segítségével vizsgáljuk a stabilitást. Itt

$$f(x) = \frac{2px}{p+x^2},\ \text{így}\ f'(x) = \frac{2p\left(p+x^2\right) - 2px\cdot 2x}{\left(p+x^2\right)^2} = \frac{2p^2-2px^2}{\left(p+x^2\right)^2}.$$

Mivel $f'(0) = 2p^2/p^2 = 2$, a 0 instabil. Mivel $f'(\sqrt{p}) = f'(-\sqrt{p}) = 0$, a másik két egyensúlyi helyzet aszimptotikusan stabil.

5. Egyensúlyi helyzetek: $(0,0)$, $(1,0)$ és $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Jacobi-mátrix:

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 2-2x-y & -x \\ y & \frac{1}{2}+x \end{pmatrix}.$$

Stabilitás: $(0,0)$ instabil, $(1,0)$ instabil, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ stabil.

6. Legyen A/B az az esemény, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott vizsgált személy mozgásszervi/érzékszeri rendellenességben szenved. A feladat szerint $P(A) = 0,05$, $P(B) = 0,03$ és $P(B|A) = 0,2$.

(a) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$. Tehát kell $P(A\cap B)$. A feltételes valószínűség definiciójából adódik, hogy $P(A\cap B) = P(B|A)P(A) = 0,2\cdot 0,05 = 0,01$. Tehát $P(A\cup B) = 0,07$.

(b) Nem, mert $P(A)P(B) \neq P(A\cap B)$.

(c) $P(A\setminus B) = P(A) - P(A\cap B) = 0,04$.

7. (4) genotípusa szükségképpen Aa. Legyen A_1, A_2, B az alábbi három esemény:

A_1 : (3) nem hordozó (AA),

A_2 : (3) hordozó (Aa),

B : az első gyermek egészséges.

Ekkor Ekkor A_1 és A_2 teljes eseményrendszert alkot, $P(A_1) = 0,93$, $P(A_2) = 0,07$, és a szokásos táblázatok segítségével látható, hogy $P(B|A_1) = 1$, $P(B|A_2) = 0,75$.

(a) A teljes valószínűség tételéből

$P(B) = P(B|A_1)\,P(A_1) + P(B|A_2)\,P(A_2) = 1 \cdot 0,93 + 0,75 \cdot 0,07 = 0,9825.$

(b) Legyen C az az esemény, hogy mindkét gyermek egészséges. Ekkor $P(C|A_1) = 1^2 = 1$, $P(C|A_2) = 0,75^2 = 0,5625.$

(b) Meg kell határoznunk $P(A_2|C)$-t. A Bayes-tételből:

$$P(A_2|C) = \frac{P(C|A_2)\,P(A_2)}{P(C|A_1)\,P(A_1) + P(C|A_2)\,P(A_2)} = \frac{0,5625 \cdot 0,07}{1 \cdot 0,93 + 0,5625 \cdot 0,07} \approx 0,04.$$