Másodrendű lineáris differenciaegyenletek

1. Oldjuk meg a differenciaegyenleteket:

$$\begin{array}{ll}
a)\ x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n=0, & x_0=2,\ x_1=5; \\
b)\ x_{n+2}-x_{n+1}+x_n=0, & x_0=-2,\ x_1=1; \\
c)\ x_{n+2}-x_n=0, & x_0=3,\ x_1=5; \\
d)\ 6x_{n+2}-5x_{n+1}+x_n=0, & x_0=10,\ x_1=5; \\
e)\ x_{n+2}+4x_n=0, & x_0=10,\ x_1=10;
\end{array}$$

Mi az $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat határértéke, ha $n \to \infty$?

2. Egy adott faj nőstény egyedei minden év adott szakaszában utódokat hoznak a világra. Az utódok egy része eléri a felnőttkort, felnőttként szaporodik és életének valamelyik évében végül elpusztul. A fajhoz tartozó élőlények életük első évében nem szaporodóképesek (azaz az n-dik évben születő egyed az $n+1$-dik évben még nem hozhat utódokat a világra). Adjuk meg a problémát leíró másodrendű differenciaegyenletet a_n-re a következő jelölésekkel:

a_n a felnőtt nőstény egyedek száma az n-dik évben,

b_n a fiatal (újszülött) egyedek száma az n-dik évben,

p paraméter adja meg, hogy a fiatal egyedek hányadrésze éri meg a felnőttkort,

q adja meg, hogy a felnőtt nőstény egyedek hányadrésze éri meg a következő évet,

f egy nőnemű egyed utódainak átlagos száma,

r a nőstények aránya a populációban.

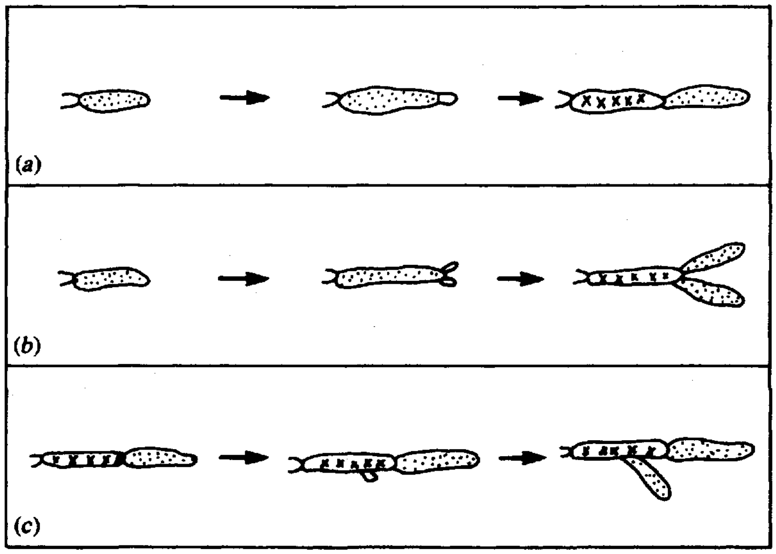
3. A következő probléma vizsgálatát olyan szelvényes élőlények (algák vagy gombák) motiválják, amelyek újabb szelvények létrehozásával gyarapodnak. Hipotetikus szelvényes élőlényünk 24 óránként az alábbi 3 módon növekszik:

(a) a terminális (szélső) szelvények p hányada létrehoz 1 új szelvényt,

(b) a terminális szelvények $q = 1 - p$ hányada létrehoz 2 új szelvényt,

(c) a terminális melletti szelvények r hányada létrehoz egy új szelvényt (lásd ábra).

Nem vesszük figyelembe, hogy a növekedés a rendelkezésre álló táplálék mennyiségétől, az élőlény belső tartalékaitól, illetve más tényezőktől is függhet. Legyen a_n/b_n a terminális/terminális melletti szelvények száma az n-dik napon. Hány terminális szelvény lesz n nap múlva? Írjunk fel egy elsőrendű egyenletrendszert a_n-re és b_n-re, illetve egy másodrendű egyenletet a_n-re!



4. Egy adott egynyári virág esetén a következő paramétereket mértük: $\alpha = 0,6$, $\beta = 0,30625$, $\sigma = 0,5$, $\gamma = 16$. Hogyan alakul a populáció egyedszáma az évek során, ha kezdetben (a 0. évben) 100, az 1. évben pedig 390 növényt számoltunk?

5.* Egynyári növények túlélése. A $p_{n+2} - \alpha\sigma\gamma p_{n+1} - \beta\,(1-\alpha)\,\sigma^2\gamma p_n = 0$ egyenletben hogyan kell γ-t választanunk (mint α, β és σ függvényét) ahhoz, hogy az egyik sajátérték 1-nél nagyobb legyen? (Ez kell ahhoz, hogy a populáció növekedjen.)

Segítség a feladatokhoz

2. Hogyan függ b_{n+1} a_n-től, illetve a_{n+1} az a_n és b_n tagoktól?

3. Vegyük észre, hogy az összes n-dik napon terminális szelvény szükségképpen terminális melletti lesz a következő napon, a szélső melletti szelvények pedig „beljebb" kerülnek. Ebből azonnal adódik egy összefüggés b_{n+1} és a_n között. Második lépésként számoljuk össze, hogy hogyan születnek új terminális szelvények.

Megoldások

1. *a*) egy sajátértékek van: $\lambda = 1$, a megoldás: $x_n = 2 + 3n$, $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$; *b*) $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, amiből $r = 1$, $\varphi = 60°$, $x_n = -2\cos(n60°) + \frac{4}{\sqrt{3}}\sin(n60°)$, $\lim_{n\to\infty} x_n$ nem létezik, ez a sorozat oszcillál; *c*)$\lambda_1 = +1$, $\lambda_2 = -1$, $x_n = 4-(-1)^n = 4+(-1)^{n+1}$, szintén nincs határérték *d*) $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{3}$, $x_n = 10\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$; *e*) $\lambda_1 = 2i$ és $\lambda_2 = -2i$, amiből $r = 2$, $\varphi = 90°$, a megoldás: $x_n = 2^n\left\{10\cos(n90°) + 5\sin(n90°)\right\}$ oszcilláló sorozat.

2. $b_{n+1} = fqa_n,\ a_{n+1} = rpb_n + qa_n$, ahonnan $a_{n+1} = rpfqa_{n-1} + qa_n$.

3. Elsőrendű egyenletrendszer:

$b_{n+1} = a_n$, $a_{n+1} = pa_n + 2qa_n + rb_n = pa_n + 2(1-p)a_n + rb_n = (2-p)a_n + rb_n$.
Másodrendű egyenlet: $a_{n+1} = (2-p)a_n + ra_{n-1}$ vagy $a_{n+2} = (2-p)a_{n+1} + ra_n$.

4. $p_n = 80 \cdot 4,9^n + 20(-0,1)^n$ - a második tagnak oszcilláló hatása van, ez azonban egyre kisebb ahogy n-t egyre nagyobbra választjuk. Mivel $\lim_{n\to\infty} 4,9^n = \infty$ és $\lim_{n\to\infty}(-0,1)^n = 0$, ezért $\lim_{n\to\infty} p_n = \infty$, a populáció mérete minden határon túl nő.

5. A nagyobb sajátérték, $\frac{\alpha\sigma\gamma+\sqrt{(\alpha\sigma\gamma)^2+4\beta(1-\alpha)\sigma^2\gamma}}{2} > 1 \Leftrightarrow \gamma > \frac{1}{\alpha\sigma+\beta(1-\alpha)\sigma^2}$.