Lineáris differenciaegyenletek

1. Oldjuk meg a differenciaegyenleteket:

$$
\begin{array}{ll}
a)\ x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0, & x_0 = 2,\ x_1 = 5; \\
b)\ x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 0, & x_0 = -2,\ x_1 = 1; \\
c)\ x_{n+2} - x_n = 0, & x_0 = 3,\ x_1 = 5; \\
d)\ 6x_{n+2} - 5x_{n+1} + x_n = 0, & x_0 = 10,\ x_1 = 5; \\
e)\ x_{n+2} + 4x_n = 0, & x_0 = 10,\ x_1 = 10;
\end{array}
$$

Mi az $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat határértéke, ha $n \to \infty$?

2. Egy adott egynyári virág esetén a következő paramétereket mértük: $\alpha = 0,6$, $\beta = 0,30625$, $\sigma = 0,5$, $\gamma = 16$. Hogyan alakul a populáció egyedszáma az évek során, ha kezdetben (a 0. évben) 100, az 1. évben pedig 390 növényt számoltunk?

3.* Egynyári növények túlélése. A $p_{n+2} - \alpha\sigma\gamma p_{n+1} - \beta\,(1-\alpha)\,\sigma^2\gamma p_n = 0$ egyenletben hogyan kell γ-t választanunk (mint α, β és σ függvényét) ahhoz, hogy az egyik sajátérték 1-nél nagyobb legyen? (Ez kell ahhoz, hogy a populáció növekedjen.)

Biológiai modellek felírása

4. Egy fát ültetünk, melynek egyetlen új ága van. Növekedése az alábbi szabályok szerint történik. Minden új ág a létrejöttét követő évben csak növekszik, majd az azt követő évtől kezdve minden évben egy új ágat hajt. Hány ága lesz a fának az egyes években (az első vizsgált év az ültetés éve)? Adjunk másodrendű differenciaegyenletet az ágak számára!

5. Egy adott faj egyedi tavasszal párzanak és nyáron utódokat hoznak a világra. Az utódok egy része megéri következő tavasszal a felnőttkort. A felnőttek a második tavasztól szaporodóképesek és életük valamelyik évében végül elpusztulnak. Adjuk meg a problémát leíró másodrendű differenciaegyenletet a_n-re a következő jelölések segítségével:

a_n a felnőtt nőstény egyedek száma az n-dik év tavaszán,

b_n a fiatal (újszülött) egyedek száma az n-dik év nyarán,

p paraméter adja meg, hogy a fiatal egyedek hányadrésze éri meg a felnőttkort,

q adja meg, hogy a felnőtt nőstény egyedek hányadrésze éri meg a következő tavaszt,

f egy nőstény egyed utódainak átlagos száma,

r a nőstények aránya a populációban.

6. Írjunk fel egy modellt olyan egynyári növények szaporodására, amelyek magjai 3 évig életképesek. A következő paramétereket vegyük figyelembe:

f: átlagos maghozam/növény,

$\alpha/\beta/\gamma$: az 1/2/3 éves magok hányadrésze csírázik ki,

σ : túlélési ráta (az alvó állapotú magok hányadrésze éri meg a következő évet).

Jelölje p_n a növények számát az n-dik évben!

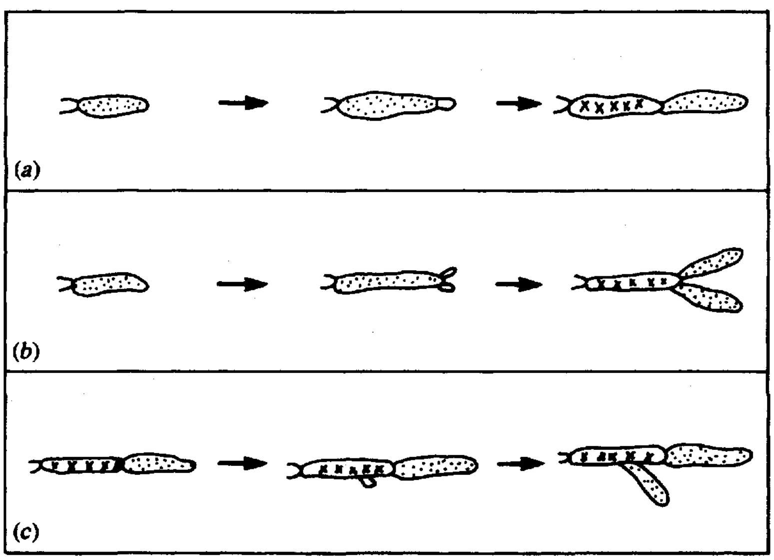
7*. A következő probléma vizsgálatát olyan szelvényes élőlények (algák vagy gombák) motiválják, amelyek újabb szelvények létrehozásával gyarapodnak. Hipotetikus szelvényes élőlényünk 24 óránként az alábbi 3 módon növekszik:

(a) a terminális (szélső) szelvények p hányada létrehoz 1 új szelvényt,

(b) a terminális szelvények $q = 1 - p$ hányada létrehoz 2 új szelvényt,

(c) a terminális melletti szelvények r hányada létrehoz egy új szelvényt (lásd ábra).

Nem vesszük figyelembe, hogy a növekedés a rendelkezésre álló táplálék mennyiségétől, az élőlény belső tartalékaitól, illetve más tényezőktől is függhet. Legyen a_n/b_n a terminális/terminális melletti szelvények száma az n-dik napon. Hány terminális szelvény lesz n nap múlva? Írjunk fel egy elsőrendű egyenletrendszert a_n-re és b_n-re, illetve egy másodrendű egyenletet a_n-re!



Segítség a feladatokhoz

4. Egyszerű észrevétel: az n-dik évben az ága száma = a tavalyi ágak száma + új ágak. Ebből induljunk ki.

5. Hogyan függ b_{n+1} a_n-től, illetve a_{n+1} az a_n és b_n tagoktól?

6. Egy harmadrendű differenciaegyenletet írjunk fel!

7. Vegyük észre, hogy az összes n-dik napon terminális szelvény szükségképpen terminális melletti lesz a következő napon, a szélső melletti szelvények pedig „beljebb" kerülnek. Ebből azonnal adódik egy összefüggés b_{n+1} és a_n között. Második lépésként számoljuk össze, hogy hogyan születnek új terminális szelvények.

Megoldások

1. $a)$ egy sajátértékek van: $\lambda = 1$, a megoldás: $x_n = 2 + 3n$, $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$; $b)$ $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, amiből $r = 1$, $\varphi = 60°$, $x_n = -2\cos(n60°) + \frac{4}{\sqrt{3}}\sin(n60°)$, $\lim_{n\to\infty} x_n$ nem létezik, ez a sorozat oszcillál; $c)\lambda_1 = +1$, $\lambda_2 = -1$, $x_n = 4-(-1)^n = 4+(-1)^{n+1}$, szintén nincs határérték $d)$ $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{3}$, $x_n = 10\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$; $e)$ $\lambda_1 = 2i$ és $\lambda_2 = -2i$, amiből $r = 2$, $\varphi = 90°$, a megoldás: $x_n = 2^n\left\{10\cos(n90°) + 5\sin(n90°)\right\}$ oszcilláló sorozat.

2. $p_n = 80 \cdot 4,9^n + 20\,(-0,1)^n$ - a második tagnak oszcilláló hatása van, ez azonban egyre kisebb ahogy n-t egyre nagyobbra választjuk. Mivel $\lim_{n\to\infty} 4,9^n = \infty$ és $\lim_{n\to\infty}(-0,1)^n = 0$, ezért $\lim_{n\to\infty} p_n = \infty$, a populáció mérete minden határon túl nő.

3. A nagyobb sajátérték, $\frac{\alpha\sigma\gamma+\sqrt{(\alpha\sigma\gamma)^2+4\beta(1-\alpha)\sigma^2\gamma}}{2} > 1 \Leftrightarrow \gamma > \frac{1}{\alpha\sigma+\beta(1-\alpha)\sigma^2}$.

4. Jelölje x_n az n-dik évben az ágak számát, $n \geq 1$. A feladat szerint $x_0 = 1$ és $x_1 = 1$. Minden évben az egy évesnél idősebb ágak hajtanak új ágat, az egyévesek nem. Így az n-dik évben annyi új ág lesz, amennyi volt az $(n-2)$-dikben. Így $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ minden $n \geq 2$-re. A Fibonacci-sorozatot kaptuk!

5. $b_{n+1} = fqa_n$, $a_{n+1} = rpb_n + qa_n$, ahonnan $a_{n+1} = rpfqa_{n-1} + qa_n$.

6. $p_{n+3} = \alpha\sigma f p_{n+2} + \beta\sigma(1-\alpha)\sigma f p_{n+1} + \gamma\sigma(1-\beta)\sigma(1-\alpha)\sigma f p_n$.

7. Elsőrendű egyenletrendszer:

$b_{n+1} = a_n$, $a_{n+1} = pa_n + 2qa_n + rb_n = pa_n + 2(1-p)a_n + rb_n = (2-p)a_n + rb_n$.

Másodrendű egyenlet: $a_{n+1} = (2-p)a_n + ra_{n-1}$ vagy $a_{n+2} = (2-p)a_{n+1} + ra_n$.