Komplex számok

1. Ábrázoljuk a következő számokat a komplex számsíkon:

$$a)\ i; \quad b)\ 5+2i;$$
$$c)\ -i; \quad d)\ 2-i.$$

2. Fejezzük ki trigonometrikus alakban a következő számokat:

$$a)\ \tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2}; \quad b)\ -4-3i; \quad c)\ -4+3i; \quad d)\ -1.$$

3. Fejezzük ki kanonikus alakban a következő számokat:

$$a)\ 4\left(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ\right); \quad b)\ 6\left(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ\right);$$

4. Végezzük el a kijelölt műveleteket:

$a)$ $3i+5i$; $b)$ $(5+2i)+4$;
$c)$ $(2+2i)+(-3+\sqrt{3}i)$; $d)$ $(2-i)+\left(-4+\frac{3}{2}i\right)$;
$e)$ $\overline{1+4i}$; $f)$ $(2+3i)(5-4i)$;
$g)$ $7i\cdot(-2)i$; $h)$ $3(1+\sqrt{3}i)$;
$i)$ $4\left(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ\right)\cdot 2\left(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ\right)$; $j)$ $\left(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ\right)^{10}$;
$k)$ $\left(2\left(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ\right)\right)^6$; $l)$ $(2+i)^2$;
$m)$ i^6; $n)$ $(-i)^2$;
$o)$ $\left(2-\sqrt{3}i\right)^5$; $p)$ $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$;
$q)$ $4\left(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ\right)/2\left(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ\right)$; $r)$ $\frac{4-6i}{1+3i}$;
$s)$ $\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)^7$; $t)$ $\sqrt[3]{i}$;
$u)$ $\sqrt[4]{1}$.

5. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halamazán:

$$x^2-2x+10=0;$$

$$x^2+25=0.$$

Megoldások

2. $a)1\left(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ\right)$; $b)$ $5\left(\cos\left(-143.13^\circ\right) + i\sin\left(-143.13^\circ\right)\right)$; $c)$ $5\left(\cos 143.13^\circ + i\sin 143.13^\circ\right)$;

$d)$ $1\left(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ\right)$.

3. $a)$ $2\sqrt{3} + 2i$; $b)$ $6 = 6 + 0i$;

4. $a)$ $8i$; $b)$ $9 + 2i$; $c)$ $-1 + \left(2 + \sqrt{3}\right)i$; $d)$ $-2 + \frac{1}{2}i$; $e)$ $1 - 4i$; $f)$ $22 + 7i$; $g)$ 14; $h)$ $3 + 3\sqrt{3}i$;

$i)$ $8\left(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ\right) = 8i$; $j)$ $\cos 300^\circ + i\sin 300^\circ = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $k)$ $64\left(\cos 360^\circ + i\sin 360^\circ\right) = 64$;

$l)$ $(2+i)^2 = (2+i)(2+i) = 3 + 4i$; $m)$ $i^6 = \left(i^2\right)^3 = (-1)^3 = -1$; $n)$ $(-i)^2 = (-1)^2 i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$;

$o)$ $\left(2 - i\sqrt{3}\right)^5 \approx \left(\sqrt{7}\left(\cos\left(-40,89^\circ\right) + i\sin\left(-40,89^\circ\right)\right)\right)^5 = \left(\sqrt{7}\right)^5 \left(\cos\left(-204,45^\circ\right) + i\sin\left(-204,45^\circ\right)\right) \approx$

$\approx -118,02 + 53,66i$ (csak közelítő megoldás);

$p)$ $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ\right)^3 = \cos 180^\circ + i\sin 180^\circ = -1$;

$p)$ $2\left(\cos\left(-30^\circ\right) + i\sin\left(-30^\circ\right)\right)$;

$r)$ $\frac{4-6i}{1+3i} = \frac{(4-6i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{4-18-6i-12i}{1+9} = -\frac{7}{5} - \frac{9}{5}i$;

$s)$ $\left(\sqrt{2} - \sqrt{2}i\right)^7 = \left(2\left(\cos\left(-45^\circ\right) + i\sin\left(-45^\circ\right)\right)\right)^7 = 128\left(\cos\left(-315^\circ\right) + i\sin\left(-315^\circ\right)\right) =$

$= 128\left(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ\right) = 64\sqrt{2} + i64\sqrt{2}$;

$t)$ $i = 1\left(\cos\left(90^\circ\right) + i\sin\left(90^\circ\right)\right)$, így i 3-dik gyökei (azok a komplex számok, amelyek köbre emelve $i - t$ adnak):

$w_0 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\left(\frac{90^\circ + 0\cdot 360^\circ}{3}\right) + i\sin\left(\frac{90^\circ + 0\cdot 360^\circ}{3}\right)\right) = \cos 30^\circ + i\sin 30^\circ$,

$w_1 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\left(\frac{90^\circ + 1\cdot 360^\circ}{3}\right) + i\sin\left(\frac{90^\circ + 1\cdot 360^\circ}{3}\right)\right) = \cos 150^\circ + i\sin 150^\circ$,

$w_2 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\left(\frac{90^\circ + 2\cdot 360^\circ}{3}\right) + i\sin\left(\frac{90^\circ + 2\cdot 360^\circ}{3}\right)\right) = \cos 270^\circ + i\sin 270^\circ$;

$u)$ $1, -1, i, -i$.

5. $a)$ $1 + 3i$, $1 - 3i$; $b)$ $5i$, $-5i$.