Gyakorló feladatok

1. Adjuk meg a megoldást!

$$
\begin{array}{ll}
a)\ x_{n+2} - 2x_{n+1} + \frac{3}{4}x_n = 0, & x_0 = 1,\ x_1 = \frac{5}{2}; \\
b)\ x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0, & x_0 = -1,\ x_1 = 0; \\
c)\ x_{n+2} - 2\sqrt{3}x_{n+1} + 4x_n = 0, & x_0 = 1,\ x_1 = \sqrt{3}; \\
d)\ x_{n+2} + 2x_{n+1} + 2x_n = 0, & x_0 = 2,\ x_1 = -1; \\
e)\ x_{n+2} - 2x_{n+1} + 0,96x_n = 0, & x_0 = 5,\ x_1 = 5,2; \\
f)\ 100x_{n+2} - 300x_{n+1} + 225x_n = 0, & x_0 = 0,\ x_1 = 3;
\end{array}
$$

2. Egy fát ültetünk, melynek egyetlen új ága van. Növekedése az alábbi szabályok szerint történik. Minden új ág a létrejöttét követő évben csak növekszik, majd az azt követő évtől kezdve minden évben egy új ágat hajt. Hány ága lesz a fának az egyes években (az első vizsgált év az ültetés éve)? Adjunk másodrendű differenciaegyenletet az ágak számára!

3. Gyógyszeradagolási probléma. Gyógykezelésének kezdetén egy beteg egy adott gyógyszerből 10 tablettát (10 dózist) kap, majd ezután minden reggel kap 2 tablettát (2 dózist). A hatóanyag fele elbomlik 24 óra alatt. Határozzuk meg tetszőleges $n \geq 1$-re, hogy mennyi hatóanyag van a szervezetében az n-dik napon! Mi a hatóanyag mennyiségének határértéke, ha a napok száma tart a végtelenbe?

Segítség

2. Egyszerű észrevétel: az n-dik évben az ága száma = a tavalyi ágak száma + új ágak. Ebből induljunk ki.

Megoldások

1. *a)* $x_n = 2\left(\frac{3}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n$, *b)* $x_n = (n-1)2^n$, *c)* $x_n = 2^n \cos(n30°)$,
d) $x_n = \left(\sqrt{2}\right)^n (2\cos(n135°) + \sin(n135°))$, *e)* $x_n = 3 \cdot 1,2^n + 2 \cdot 0,8^n$, *f)* $x_n = 2n\left(\frac{3}{2}\right)^n$.

2. Jelölje x_n az n-dik évben az ágak számát, $n \geq 1$. A feladat szerint $x_0 = 1$ és $x_1 = 1$. Minden évben az egy évesnél idősebb ágak hajtanak új ágat, az egyévesek nem. Így az n-dik évben annyi új ág lesz, amennyi volt az $n-2$-dikben. Így $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ minden $n \geq 2$-re. A Fibonacci-sorozatot kaptuk!

3. $x_n = 10\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$, $\lim_{n\to\infty} x_n = 4$.