Elemi valószínűségszámítás II.

Példák a teljes valószínűség tételére illetve a Bayes-tételre

1.Tüdőszűrés alkalmával a betegek 90%-nál a vizsgálat kimutatja a tbc betegséget. Egészséges embereknél a vizsgálat 1% gyakorisággal -hamisan- beteget jelez. A tbc gyakorisága a szűrésre kerülők körében: 10000 ember közül átlagosan öten betegek. Mi a valószínűsége annak, hogy valakit véletlenszerűen kiválasztva

(a) betegséget állapítunk meg ÉS az illető valóban beteg,

(b) betegséget állapítunk meg ÉS az illető nem beteg,

(c) a vizsgált személy valóban tbc-s, HA a vizsgálati eredmény pozitív? Alkalmazzuk a Bayes-tételt.

2. Egy patkány két labirintus közül találomra választ. Annak a valószínűsége, hogy 3 perc alatt keresztüljut a labirintuson, $0,6$ illetve $0,3$.

(a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a patkány három perc alatt átjut? Használjuk a teljes valószínűség tételét.

(b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy az első labirintust választotta, HA három perc elteltével azt látjuk, hogy a patkány átjutott a labirintuson? Alkalmazzuk a Bayes-tételt.

3. Egy városban ugyanannyi férfi van, mint nő. A színvakság valószínűsége férfiaknál 5/100, nőknél 25/1000.

(a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy hogy az utcán először szembejövő ember színvak?

(b) Mennyi a valószínűsége, hogy egy színvakokról vezetett nyilvántartásban egy találomra választott karton egy férfi adatait tartalmazza?

4.$*$ Biomatematika vizsgán minden vizsgakérdéshez három lehetséges válasz van megadva, egy helyes közülük. A vizsgázó p valószínűséggel tudja a választ, ha nem tudja, 1/3 valószínűséggel jelöli meg a 3 válasz valamelyikét. Az egyik választ megnézve azt látjuk, hogy helyes. Mi a valószínűsége, hogy a hallgató valóban tudta a választ?

Valószínűség a genetikában (újabb példák a teljes valószínűség tételére illetve a Bayes-tételre)

1. Autoszómás recesszív betegség öröklését vizsgáljuk. Tudjuk, hogy az egészséges felnőtt lakosság 6%-a hordozó (heterozigóta).

(a) Mi a valószínűsége annak, hogy egészséges anya és beteg apa házasságából egy egészséges gyermek születik? Alkalmazzuk a teljes valószínűség tételét.

(b) Mi a valószínűsége annak, hogy az anya nem hordozó annak ismeretében, hogy egészséges gyermekük született? Vegyük észre, hogy a Bayes-tételt kell használnunk.

2. 1. Autoszómás recesszív betegség öröklését vizsgáljuk. Tudjuk, hogy az egészséges felnőtt lakosság 6%-a hordozó (heterozigóta).

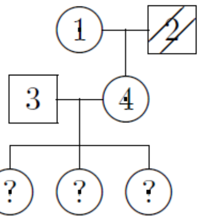
(a) Mi a valószínűsége annak, hogy egészséges anya és beteg apa házasságából két egészséges gyermek születik (nem egypetéjű ikrek)?

(b) Mi a valószínűsége annak, hogy az anya Aa genotípusú annak ismeretében, hogy két egészséges gyermekük született?

3. Autoszómás recesszíven öröklődő betegséget vizsgálunk az alábbi családfán. Az (1), (3) és (4) személyek egészséges fenotípusúak, (2) beteg. Tudjuk, hogy az egészséges felnőtt lakosság 8%-a hordozó (Aa).

(a) Mi a valószínűsége annak, hogy (3) és (4) első gyermeke egészséges?

(b) Mi a valószínűsége annak, hogy (3) hordozó annak ismeretében, hogy (4) három egészséges gyermeket szült neki, akik között nincsenek egypetéjű ikrek?



4. Autoszómás dominánsan(!) öröklődő betegséget vizsgálunk olyan családban, ahol az anya beteg fenotípusú (AA vagy Aa), az apa egészséges (aa). Tudjuk, hogy a beteg felnőtt lakosság 96%-a hordozza a recesszív (egészséges) a allélt.

(a) Mi a valószínűsége annak, hogy a pár születendő első gyermeke beteg? (b) Mi a valószínűsége annak, hogy az anya homozigóta, ha beteg gyermekük született?

Megoldások

Példák a teljes valószínűség tételére illetve a Bayes-tételre

1. Legyen A_1, A_2, B az alábbi három esemény:

A_1 : egy véletlenszerűen kiválasztott ember tbc beteg,

A_2 : egy véletlenszerűen kiválasztott ember nem beteg,

B : a tüdőszűrés alkalmával betegséget állapítunk meg.

Ekkor A_1 és A_2 teljes eseményrendszert alkot, $P(A_1) = 5/10000 = 0,0005$, $P(A_2) = 0,9995$, $P(B|A_1) = 0,9$, $P(B|A_2) = 0,01$.

(a) $P(B \cap A_1) = P(B|A_1)\,P(A_1) = 0,00045$.

(b) $P(B \cap A_2) = P(B|A_2)\,P(A_2) = 0,009995$.

(c) Bayes tételének alkalmazásával:

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)\,P(A_1)}{P(B|A_1)\,P(A_1) + P(B|A_2)\,P(A_2)} \approx 0,043.$$

2. Legyen A_1/A_2 az az esemény, hogy a patkány az 1./2. labirintust választotta, B az az esemény, hogy 3 perc alatt kijut. A_1 és A_2 teljes eseményrendszert alkot. Mivel a patkány a labirintusok közül találomra választ, $P(A_1) = P(A_2) = 0,5$. A feladat szerint $P(B|A_1) = 0,6$ és $P(B|A_2) = 0,3$.

(a) A teljes valószínűség tétele szerint $P(B) = P(B|A_1)\,P(A_1) + P(B|A_2)\,P(A_2) = 0,45$.

(b) Kell $P(A_1|B)$. Bayes tételének alkalmazásával

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)\,P(A_1)}{P(B|A_1)\,P(A_1) + P(B|A_2)\,P(A_2)} \approx 0,67.$$

3. Legyen A_1, A_2, B az alábbi három esemény:

A_1 : egy véletlenszerűen kiválasztott ember férfi,

A_2 : egy véletlenszerűen kiválasztott ember nő,

B : egy véletlenszerűen kiválasztott ember színvak.

Ekkor Ekkor A_1 és A_2 teljes eseményrendszert alkot, $P(A_1) = 0,5$, $P(A_2) = 0,5$, $P(B|A_1) = 5/100 = 0,05$, $P(B|A_2) = 25/1000 = 0,025$.

(a) A teljes valószínűség tételével:

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) = 0,05 \cdot 0,5 + 0,025 \cdot 0,5 = 0,0375.$$

(b) A Bayes-tételből:

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2)} \approx 0,67.$$

4. Jelölje H azt az eseményt, hogy a válasz helyes, T azt az eseményt, hogy a hallgató tudja a választ. Feltehető, hogy $P(H|T) = 1$. Ekkor A Bayes-tételből:

$$P(T|H) = \frac{1 \cdot p}{1 \cdot p + \frac{1}{3}(1-p)}.$$

Valószínűség a genetikában (újabb példák a teljes valószínűség tételére illetve a Bayes-tételre)

1. Legyen A_1, A_2, B az alábbi három esemény:

A_1 : az anya nem hordozó, azaz AA a genotípusa,

A_2 : az anya hordozó, azaz Aa a genotípusa,

B : a gyermek egészséges.

Ekkor Ekkor A_1 és A_2 teljes eseményrendszert alkot, $P(A_1) = 0,94$, $P(A_2) = 0,06$, és a szokásos táblázatok segítségével látható, hogy $P(B|A_1) = 1$, $P(B|A_2) = 0,5$.

(a) : A teljes valószínűség tételéből

$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) = 1 \cdot 0,94 + 0,5 \cdot 0,06$.

(b) Meg kell határoznunk $P(A_1|B)$-t. A Bayes-tételből:

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2)} = \frac{1 \cdot 0,94}{1 \cdot 0,94 + 0,5 \cdot 0,06}.$$

2. Az előző feladathoz hasonlóan legyen A_1, A_2, C az alábbi három esemény:

A_1 : az anya nem hordozó, azaz AA a genotípusa,

A_2 : az anya hordozó, azaz Aa a genotípusa,

C : mindkét gyermek egészséges, azaz az anya mind a kétszer A allélt adott.

Ekkor Ekkor A_1 és A_2 teljes eseményrendszert alkot, $P(A_1) = 0,94$ és $P(A_2) = 0,06$. A szokásos táblázatok segítségével látható, hogy $P(\text{az anya } A \text{ allélt ad egy gyermeknek}|A_2) = 0,5$. Mivel a két gyermek fogantatása független, $P(C|A_2) = 0,5^2$. Emellett nyilvánvaló: $P(C|A_1) = 1$.

(a) : A teljes valószínűség tételéből

$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) = 1^2 \cdot 0,94 + 0,5^2 \cdot 0,06 = 0,955$.

(b) Meg kell határoznunk $P\left(A_2|B\right)$-t. A Bayes-tételből:

$$P(A_2|B) = \frac{P\left(B|A_2\right)P\left(A_2\right)}{P\left(B|A_1\right)P\left(A_1\right) + P\left(B|A_2\right)P\left(A_2\right)} = \frac{0,5^2 \cdot 0,06}{1^2 \cdot 0,94 + 0,5^2 \cdot 0,06} \approx 0,016.$$

3. (1) genotípusa AA vagy Aa, (2) genotípusa aa, így szükségképpen az egészséges (4) genotípusa Aa. (3) genotípusa lehet AA vagy Aa. Legyen A_1, A_2, B az alábbi három esemény:

A_1 : a (3) apa nem hordozó, azaz AA a genotípusa,

A_2 : (3) hordozó, azaz Aa a genotípusa,

B : az első gyermek egészséges.

Ekkor $P(A_1) = 0,92$, $P\left(A_2\right) = 0,08$, $P\left(B|A_1\right) = 1$, $P\left(B|A_2\right) = 0,75$.

(a) A teljes valószínűség tételét alkalmazzuk.

$P\left(B\right) = P\left(B|A_1\right)P\left(A_1\right) + P\left(B|A_2\right)P\left(A_2\right) = 1 \cdot 0,92 + 0,75 \cdot 0,08 = 0,98.$

(b) Legyen C az az esemény, hogy mind a három gyermek egészséges. Kell $P\left(A_2|C\right)$. Ekkor $P\left(C|A_1\right) = 1^3 = 1$, $P\left(C|A_2\right) = 0,75^3$ a gyermekek fogantatásának függetlensége miatt. A Bayes-tételből:

$$P(A_2|C) = \frac{P\left(C|A_2\right)P\left(A_2\right)}{P\left(C|A_1\right)P\left(A_1\right) + P\left(C|A_2\right)P\left(A_2\right)} = \frac{0,75^3 \cdot 0,08}{1 \cdot 0,98 + 0,75^3 \cdot 0,08} \approx 0,034.$$

4. Legyen A_1, A_2, B az alábbi három esemény:

A_1 : az anya genotípusa AA,

A_2 : az anya genotípusa Aa,

B : az első gyermek beteg.

Ekkor $P(A_1) = 0,04$, $P\left(A_2\right) = 0,96$, $P\left(B|A_1\right) = 1$, $P\left(B|A_2\right) = 0,5$.

(a) $P\left(B\right) = P\left(B|A_1\right)P\left(A_1\right) + P\left(B|A_2\right)P\left(A_2\right) = 1 \cdot 0,04 + 0,5 \cdot 0,96 = 0,52.$

(b)

$$P(A_1|B) = \frac{P\left(B|A_1\right)P\left(A_1\right)}{P\left(B|A_1\right)P\left(A_1\right) + P\left(B|A_2\right)P\left(A_2\right)} = \frac{1 \cdot 0,04}{1 \cdot 0,04 + 0,5 \cdot 0,96} \approx 0,077.$$