Elemi valószínűségszámítás

Összeszámlálási problémák (kedvező esetek / összes eset)

1. Egy tenyészetben 5 állat közül 3 mutáns. Két állatot véletlenszerűen és visszatevés nélkül kiválasztunk kísérleti célra. Mi annak a valószínűsége, hogy a két állat közül pontosan (a) 0, (b) 1, (c) 2 lesz mutáns?

2. Mi a valószínűsége annak, hogy egy 5 gyermekes családban pontosan 2 gyermek fiú, ha nincsenek közöttük egypetéjű ikrek?

3. Mi annak a valószínűsége, hogy egy olyan házaspár, amelyik két fiúgyermeket szeretne, addig kell várjon, míg 4 gyermekük lesz? A gyerekek között nincsenek egypetéjű ikrek.

4. 32 lapos magyar kártyából húzunk 8-at. Mi annak a valószínűsége, hogy legalább 7 lap zöld?

Eseményalgebra

5. Egy alkalmassági vizsgálat tapasztalatai szerint a vizsgált személyeken $0,05$ valószínűséggel mozgásszervi és $0,03$ valószínűséggel érzékszervi rendellenesség figyelhető meg. Az együttes előfordulás valószínűsége $0,01$. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy találomra kiválasztott személyen

(a) valamelyik rendellenesség megfigyelhető;

(b) egyik rendellenesség sem figyelhető meg;

(c) érzékszervi rendellenességet figyelünk meg, ha az illető mozgásszervi rendellenességgel él? Fordítva, mekkora eséllyel találunk mozgásszervi rendellenességet a érzékszervi rendellenességben szenvedőknél?

6. Egy Drosophila-tenyészetben az állatok 25%-a szárnymutáns, 15%-a szemmutáns, és a szárnymutánsok 40%-a szemmutáns. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott állat

(a) rendelkezik legalább az egyik mutációval;

(b) szárnymutáns, ha tudjuk, hogy szemmutáns;

(c) szárnymutáns, de nem szemmutáns;

(d) nem szemmutáns?

7. Ismert, hogy $P(A) = P(A|B) = 0,25$ és $P(B|A) = 0,5$. Adjuk meg a $P(B \setminus A)$, $P(B^c)$, $P(A \cup B)$ valószínűségeket.

8. (Egy valamivel nehezebb példa.) Mennyi annak a feltételes valószínűsége, hogy egy kétgyermekes családban mindkét gyermek fiú, ha

(a) az idősebb gyermek fiú,

(b) legalább az egyik fiú?

Feltesszük, hogy fiú és lány születésének valószínűsége azonos. Az első gyermek neme független a második gyermek nemétől.

Események függetlensége

9. Egy alkalmassági vizsgálat tapasztalatai szerint a vizsgált személyeken $0,05$ valószínűséggel mozgásszervi és $0,03$ valószínűséggel érzékszervi rendellenesség figyelhető meg. Az együttes előfordulás valószínűsége $0,0015$. Független-e a két esemény?

10. Egy családban 4 gyermek van, nincsenek köztük egypetéjű ikrek. Legyen A az az esemény, hogy „legfeljebb egy leány van”, B pedig, hogy „mindkét nem képviselve van”. Feltesszük, hogy a fiú és a lány születésének valószínűsége azonos. Adjuk meg a $P(A)$, $P(B)$ és $P(A \cap B)$ valószínűségeket és mutassuk meg, hogy az A és B események *nem* függetlenek!

11. Egy négygyermekes családban nincsenek egypetéjű ikrek. Legyen A: a családban páratlan számú fiú van, B: a családban több a fiú, mint a lány. Független-e ez a két esemény? A fiú és a lány születésének valószínűsége azonos.

12. Egy családban 4 gyermek van. Ha a fiú születésének valószínűsége $0,51$, mi annak a valószínűsége, hogy

(a) pontosan 1 fiú, (b) pontosan 1 leány, (c) legalább 1 fiú van?

A gyermekek neme független egymástól.

13. Ha a magyar lakosság 32%-a dohányzik, mi a valószínűsége annak, hogy 7 különböző embert véletlenszerűen kiválasztva legalább 5 dohányzik?

14. Egy nagy populációban egy génpárra nézve az egyedek 70%-a domináns homozigóta, 20% heterozigóta, 10% recesszív homozigóta. 10 különböző egyedet véletlenszerűen kiválasztunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

(a) mind a 10 egyed domináns homozigóta?

(b) 7 egyed domináns, 1 recesszív homozigóta, 2 heterozigóta?

Megoldások

Összeszámlálási problémák

1. Össze kell számolni a kedvező illetve az összes eseteket:

$$(a)\ \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = 0,1; \quad (b)\ \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} = 0,6; \quad (c)\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = 0,3.$$

2. $\binom{5}{2}/2^5$.

3. A negyedik gyermek a feladat szerint fiú. Az első három között $\binom{3}{1} = 3$–féleképpen lehet egy fiú és két lány. Így a megoldás: $3/2^4$.

4. A megoldás:

$$\frac{\binom{8}{7}\binom{24}{1} + 1}{\binom{32}{8}}.$$

Eseményalgebra

5. Legyen A az az esemény, hogy egy találomra kiválasztott személynek mozgásszervi rendellenessége van, B az az esemény, hogy érzékszervi rendellenességgel rendelkezik. Ekkor $P(A) = 0,05$, $P(B) = 0,03$ és $P(A \cap B) = 0,01$.

(a) $P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,07$.

(b) $P\left((A \cup B)^c\right) = 1 - P(A \cup B) = 0,93$.

(c) Feltételes valószínűségek: $P\left(A|B\right) = P(A \cap B)/P\left(B\right) = 1/3$ és

$P\left(B|A\right) = P(A \cap B)/P\left(A\right) = 1/5$.

6. Legyen A és B a következő két esemény:

A : egy találomra kiválasztott állat szárnymutáns, B : egy találomra kiválasztott állat szemmutáns. A feladat szerint $P\left(A\right) = 0,25$, $P\left(B\right) = 0,15$ és $P(B|A) = 0,4$.

(a) $P\left(A \cap B\right) = P(B|A) \cdot P\left(A\right) = 0,1$, ezért $P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,3$.

(b) $P(A|B) = P(A \cap B)/P\left(B\right) = 2/3$.

(c) $P(A \backslash B) = P\left(A\right) - P(A \cap B) = 0,15$.

(d) $P\left(B^c\right) = 1 - P\left(B\right) = 0,85$.

7. Mivel $P\left(A\right) = 0,25$, $P\left(B|A\right) = 0,5$ és $P\left(B|A\right) = P\left(A \cap B\right)/P\left(A\right)$, ezért $P\left(A \cap B\right) = P\left(B|A\right) \cdot P\left(A\right) = 0,125$. Innen, $P\left(A|B\right) = 0,25$-ből, a $P\left(A|B\right) = P\left(A \cap B\right)/P\left(B\right)$ egyenletből pedig azt kapjuk, hogy $P\left(B\right) = P\left(A \cap B\right)/P\left(A|B\right) = 0,5$. Következésképpen

$$P\left(B \backslash A\right) = P\left(B\right) - P\left(A \cap B\right) = 0,375, \qquad P\left(B^c\right) = 1 - P\left(B\right) = 0,5,$$

illetve

$$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,625.$$

8. (a) A legyen az az esemény, hogy az első gyermek fiú, B pedig az az esemény, hogy a második gyermek fiú. Ekkor $A \cap B$ az az esemény, hogy mind a kettő fiú. Kapjuk, hogy

$$P\left(A \cap B|A\right) = \frac{P\left((A \cap B) \cap A\right)}{P\left(A\right)} = \frac{P\left(A \cap B\right)}{P\left(A\right)},$$

mert $(A \cap B) \cap A = A \cap B$. Nyilván $P(A) = 0,5$. Mivel A és B függetlenek (az első gyermek neme független a második gyermek nemétől), ezért $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0,5^2$. A keresett valószínűség: $0,5$.

(b) Vegyük észre, hogy az $A \cap B$ (mindkét gyerek fiú) és a $A \cup B$ (legalább az egyik gyerek fiú) események metszete $A \cap B$ (mind a kettő fiú). Ezért

$$P(A \cap B|A \cup B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A) + P(B) - P(A \cap B)} = \frac{0,25}{0,5 + 0,5 - 0,25} = \frac{1}{3}.$$

Események függetlensége

9. Igen, mert $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

10. A kedvező illetve az összes esetet számolva kapjuk, hogy

$$P(A) = \frac{1 + \binom{4}{1}}{2^4} = \frac{5}{8},\ P(B) = \frac{2^4 - 2}{2^4} = \frac{3}{4}.$$

Vegyük észre, hogy $P(B)$ kiszámolásakor a „kedvező eset száma=összes esetek−rossz esetek száma” összefüggést alkalmaztuk.

$A \cap B$ az az esemény, hogy pontosan 1 lány és 3 fiú van. Így

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{4}{1}}{2^4} = \frac{1}{4}.$$

Az események nem függetlenek, mert $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$.

11. A feladat szerint A az az esemény, hogy a családban 1 vagy 3 fiú van, B pedig az az esemény, hogy a családban 3 fiú (és 1 lány) vagy 4 fiú van. Ekkor

$$P(A) = \frac{\binom{4}{1} + \binom{4}{3}}{2^4} = \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad P(B) = \frac{\binom{4}{3} + 1}{2^4} = \frac{5}{16}.$$

Az $A \cap B$ az az esemény, hogy a szülőknek pontosan 3 fia és 1 lánya van, ennek valószínűsége

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{4}{3}}{2^4} = \frac{1}{4}.$$

Ezek az események sem függetlenek, mert $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$.

12. A függetlenséget felhasználva kapjuk:

(a) $\binom{4}{1} 0,51 \cdot 0,49^3$.

(b) $\binom{4}{1} 0,51^3 \cdot 0,49$.

(c) A komplementer esemény valószínűségének kiszámolásával könnyen adódik a megoldás: $1 - 0,49^4$ ($0,49^4$ annak a valószínűsége, hogy nincs fiú a családban).

13. $\binom{7}{5} 0,32^5 \cdot 0,68^2 + \binom{7}{6} 0,32^6 \cdot 0,68^1 + 0,32^7$.

14. (a) $0,7^{10} = 0,028$.

(b) $\binom{10}{7}\binom{3}{1} 0,7^7 \cdot 0,2^2 \cdot 0,1 = 0,12$.