Differenciálszámítás

1. Mi az értelmezési tartománya az alábbi függvényeknek?

$$a)\ \ln x+\sqrt{x};\qquad b)\ \sqrt{x}\ln x;\qquad c)\ \frac{\sqrt{x}}{\ln x};$$
$$d)\ \sqrt{\ln x};\qquad e)\ \sqrt{\sin(x)};\qquad f)\ \sqrt{\sin(x^2)};$$
$$g)\ \sqrt{x^2-5x+6};\qquad h)\ \ln\frac{x+3}{x-1};\qquad i)\ \frac{e^x}{\sin x}.$$

2. Adjuk meg a differenciálhányadosát!

$$a)\ 2x+1;\qquad b)\ \frac{x}{2}+\sqrt[3]{x}=\frac{1}{2}x+x^{\frac{1}{3}};\qquad c)\ x\sin(x);$$
$$d)\ \frac{x^2-3x}{x^2};\qquad e)\ \frac{x\sin(x)}{e^x}\qquad f)\ \frac{x^2+\ln(x)}{\sqrt{x}+2x};$$
$$g)\ x^5(x+1)^2;\qquad h)\ e^{-x};\qquad i)\ \cos^2 x=(\cos x)^2;$$
$$j)\ \cos(x^2);\qquad k)\ (\sqrt{x}+7)^5\ ;\qquad l)\ \sqrt{x+\sqrt{x}}=\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}};$$
$$m)\ \ln\frac{7-5x}{2x-3};\qquad n)\ \frac{1}{\sin^3(2x)}=(\sin(2x))^{-3};\qquad o)\ \frac{e^x}{x\sqrt{1-x}};$$
$$p)\ \ln 5\cdot 5^x;\qquad q)\ \ln 5\cdot 5^x e^x\qquad r)\ 4^{x\tan\left(\frac{x}{2}\right)};$$
$$s)\ x2^{1-x^2}\qquad t)\ \sin^2 x\cos^3 x=(\sin x)^2(\cos x)^3;\qquad u)\ e^{3x}(\cos x+\sin x).$$

3. Határozzuk meg f helyi szélsőértékeit a számegyenesen, ha

$$a)\ x^3-4x^2+4x;\qquad b)^*\ f(x)=2x+\frac{1}{x^2};\qquad c)\ f(x)=\frac{x}{1+x^2};$$
$$d)^*\ f(x)=\frac{-e^x}{x+1};\qquad e)^*\ f(x)=\frac{1}{1-x^2};\qquad f)^*\ f(x)=\frac{x}{x^2-1}.$$

Megoldások

1.

a) $(0,\infty)$;

b) $(0,\infty)$;

c) $\{x\in\mathbb{R}:\ x>0,\ x\neq 1\}=(0,\infty)\setminus\{1\}$;

d) $\{x\in\mathbb{R}:\ x\geq 1\}=[1,\infty)$;

e) $\{x\in\mathbb{R}:\ k2\pi\leq x\leq \pi+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$;

f) $\left\{x\in\mathbb{R}:\ \sqrt{k2\pi}\leq x\leq\sqrt{\pi+k2\pi}\text{ vagy }-\sqrt{\pi+k2\pi}\leq x\leq-\sqrt{k2\pi},\ k\in\{0,1,2,3,..\}\right\}$;

g) $\{x\in\mathbb{R}:\ x\leq 2\text{ vagy }x\geq 3\}=(-\infty,2]\cup[3,\infty)$; *h*) $(-\infty,-3)\cup(1,\infty)$. *i*) $\{x\in\mathbb{R}:\ x\neq k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

2.

a) 2;

b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$;

c) $\sin(x)+x\cos x$;

d) $\frac{(2x-3)x^2-\left(x^2-3x\right)2x}{x^4}$;

e) $\frac{(\sin(x)+x\cos x)e^x-x\sin(x)e^x}{e^{2x}}$

f) $\frac{\left(2x+\frac{1}{x}\right)\left(\sqrt{x}+2x\right)-\left(x^2+\ln(x)\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+2\right)}{\left(\sqrt{x}+2x\right)^2}$;

g) $5x^4\left(x+1\right)^2+x^5 2\left(x+1\right)$;

h) $-e^{-x}$;

i) $-2\cos x\sin x$;

j) $-\sin\left(x^2\right)\cdot 2x$;

k) $5\left(\sqrt{x}+7\right)^4\frac{1}{2\sqrt{x}}$;

l) $\frac{1}{2}\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$;

m) $\frac{2x-3}{7-5x}\frac{-5(2x-3)-(7-5x)2}{(2x-3)^2}$;

n) $-3\left(\sin\left(2x\right)\right)^{-4}\cos\left(2x\right)2$;

o) $\frac{e^x x\sqrt{1-x}-e^x\left(\sqrt{1-x}-x\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)}{\left(x\sqrt{1-x}\right)^2}$;

p) $\left(\ln 5\right)^2 5^x$;

q) $\left(\ln 5\right)^2 5^x e^x+\ln 5\cdot 5^x e^x$;

r) $\ln 4\cdot 4^{x\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+x\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\frac{1}{2}\right)$;

s) $2^{1-x^2}+x\cdot\ln 2\cdot 2^{1-x^2}\left(-2x\right)$;

t) $2\sin x\cos x\left(\cos x\right)^3+\left(\sin x\right)^2 3\left(\cos x\right)^2\left(-\sin x\right)$;

u) $3e^{3x}\left(\cos x+\sin x\right)+e^{3x}\left(-\sin x+\cos x\right)$.

3.

a) $x=2/3$-ban helyi maximum, $x=2$-ben helyi minimum;

b) $x=1$-ben helyi minimum van (a függvény nincs $x=0$-ban értelmezve, ezt a táblázat rajzolásakor figyelembe kell venni, ezért a táblázat felosztása: $x<0$, $0<x<1$, $x=1$, $x>1$);

c) helyi minimum: $x=-1$-ben, helyi maximum: $x=1$-ben;

d) helyi maximum: $x=0$-ban (a függvény nincs $x=-1$-ben értelmezve, ezt a táblázat felírásakor figyelembe kell venni);

e) $x=0$-ban helyi minimum (a függvény ± 1-ben nincs értelmezve);

f) nincs szélsőérték, kritikus pont sincs (a függvény ± 1-ben nincs értelmezve, ezért 3 oszlopot veszünk fel a táblázatban: $x<-1$, $-1<x<1$, $x>1$).