

# Mátrixok és alkalmazásai (Leslie-mátrixok)

1. Végezzük el a kijelölt műveleteket (ha ez lehetséges):

$$\begin{aligned} a) \quad & \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 11 \end{pmatrix} =?; & b) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 10 & 0 \end{pmatrix} =?; \\ c) \quad & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =?; & d) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} =?; \\ e) \quad & \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 0 \\ 2 & 4 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} =?; & f) \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} =? \end{aligned}$$

2. Egy adott lazacfajta legfeljebb 4 évig él és ezért 4 korcsoportba osztjuk őket. Az első életévet a lazacok 0,5%-a, a második évet a megmaradt halak 7%-a éli túl. A harmadik évet megérvő halak 15%-a a negyedik évet is megéri. A 4. évben egy átlagos nőstény lazac 5000 nőstény utódot nemz. A lazacok az első három évben még nem szaporodóképesek.

a) Írjuk fel a populáció  $4 \times 4$ -es Leslie mátrixát.

b) Mi a koreloszlás egy év múlva, ha kezdetben minden korcsoportban 1000 nőstény lazac van?

c) Sajátérték-sajátvektor kalkulátor<sup>1</sup> segítségével adjuk meg a Leslie-mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Kapunk információt a hosszú távú koreloszlásról?

3. A *Strix occidentalis* bagolyról azt tudjuk, hogy általában 2 éves kortól szaporodik és akár 20 évet is élhet. 3 korcsoportba osztjuk a (nőstény) baglyokat: az 1. korcsoportba tartoznak az egy évnél fiatalabb egyedek, a 2. korcsoportba tartoznak a második életévükben járó egyedek, míg a 3. csoportba kerülnek a két évnél idősebb példányok.

<sup>1</sup>[http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/engl\\_eigenwert2.htm](http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/engl_eigenwert2.htm)

Jelölje  $f_i$  az  $i$ . korcsoport szaporodási rátáját (egy nőstény átlagosan hány olyan tojást rak, amiből nőstény kel ki), és  $p_i$  a túlélési rátát (azaz azt a hányadost, amely megadja, hogy az  $i$ . korcsoportba tartozó példányok mekkora hányada éri meg a következő évet).

a) Írjuk fel azt a  $3 \times 3$ -as mátrixot, amely segítségével a koreloszlást nyomon követhetjük, ha  $f_1 = f_2 = 0$ ,  $f_3 = 3$ ,  $p_1 = 0,24$ ,  $p_2 = 0,86$  és  $p_3 = 0,87$ .

b) Mi lesz a koreloszlás a következő illetve a rákövetkező évben, ha kezdetben 200db két évnél idősebb nőstény bagollyal számolunk és nincsenek fiatalabb egyedek?

c) Sajátérték-sajátvektor kalkulátor<sup>2</sup> segítségével becsüljük a populáció éves növekedését vagy csökkenését illetve a koreloszlást hosszú távon.

4. Határozzuk meg az  $A$  mátrix sajátértékeit és sajátvektorait, ha

$$a) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad a) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Adott egy állatpopuláció. A nőstények két korcsoportját különböztetjük meg: az elsőbe tartoznak az 1 évnél fiatalabbak, a másodikba az 1 évnél idősebbek. Az első korcsoportbeliek túlélési rátája  $p_1$ , a második korcsoportbeliek túlélési rátája  $p_2$ . Az első korcsoport tagjai nem szaporodóképesek, a második korcsoport szaporodási rátája (azaz egy nőstény által évente nemzett nőstény utódok átlagos száma)  $f$ . Tegyük fel, hogy ha az  $n$ -dik évben egy nőstény a 2. korcsoportba tartozik és szaporodik, az utódok az  $(n+1)$ -dik évben születnek. Adjuk meg a Leslie-mátrixot és adjunk becslést a koreloszlásra hosszú távon, ha

a)  $f = 7$ ,  $p_1 = 0,15$ ,  $p_2 = 0,8$ ;

b)  $f = 8,5$ ,  $p_1 = 0,5$ ,  $p_2 = 0,8$ .

---

<sup>2</sup>[http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/engl\\_eigenwert2.htm](http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/engl_eigenwert2.htm)

Megoldások:

1. a)  $\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 22 \end{pmatrix}$ ; b) nem értelmezük; c)  $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ; d) nem értelmezük;

e)  $\begin{pmatrix} 19 & -8 & -23 \\ 32 & -2 & -38 \end{pmatrix}$ ; f)  $\begin{pmatrix} 56 \\ 30 \\ 73 \end{pmatrix}$ .

2. a) A Leslie-mátrix:  $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5000 \\ 0,005 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,07 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,15 & 0 \end{pmatrix}$ . b) A koreloszlás 1 év múlva:  $x^{(1)} =$

$L \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 10^6 \\ 5 \\ 70 \\ 150 \end{pmatrix}$ . c) Nem, mert minden sajátérték abszolút értéke egyenlő.

3. a) A Leslie-mátrix:  $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0,24 & 0 & 0 \\ 0 & 0,86 & 0,87 \end{pmatrix}$ .

b) A koreloszlás 1 év múlva:  $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0,24 & 0 & 0 \\ 0 & 0,86 & 0,87 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 0 \\ 174 \end{pmatrix}$ , 2 év múlva:

$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0,24 & 0 & 0 \\ 0 & 0,86 & 0,87 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 600 \\ 0 \\ 174 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 522 \\ 144 \\ 151,38 \end{pmatrix}$ . c)  $\lambda_1 \approx 1,26$ ,  $v \approx \begin{pmatrix} 2,38 \\ 0,45 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$  Hosszú

távon évi 26%-os növekedés és a következő koreloszlás várható: 1. korcsoport: 62%, 2. korcsoport: 12%, 3. korcsoport: 26%.

4. a)  $\lambda_1 = 4$ ,  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  és  $\lambda_2 = 1$ ,  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . b)  $\lambda_1 = 4$ ,  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  és  $\lambda_2 = 2$ ,  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

5. a)  $L = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0,15 & 0,8 \end{pmatrix}$ ; sajátértékek:  $\lambda_1 = 1,5$ ,  $\lambda_2 = -0,7$ ; a nagyobb sajátértékhez tartozó sajátvektor:  $\begin{pmatrix} 14 \\ 3 \end{pmatrix}$  (vagy ennek tetszőleges konstansszorososa); becslés a koreloszlásra: 1. korcsoport: 82,35%, 2. korcsoport: 17,65%.

b)  $L = \begin{pmatrix} 0 & 8,5 \\ 0,5 & 0,8 \end{pmatrix}$ ; sajátértékek:  $\lambda_1 = 2,5$ ,  $\lambda_2 = -1,7$ ; a nagyobb sajátértékhez tartozó sajátvektor:  $\begin{pmatrix} 34 \\ 10 \end{pmatrix}$ ; becslés a koreloszlásra: 1. korcsoport: 77,27%, 2. korcsoport: 22,73%.