# Mátrixok és alkalmazásaik (Leslie-mátrixok)

1. Végezzük el a kijelölt műveleteket (ha ez lehetséges):

*a)* $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 11 \end{pmatrix} = ?;$ *b)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 10 & 0 \end{pmatrix} = ?;$

*c)* $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = ?;$ *d)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} = ?;$

*e)* $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 0 \\ 2 & 4 & -6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = ?;$ *f)* $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} = ?$

2. Adott egy állatpopuláció. A nőstények két korcsoportját különböztetjük meg: az elsőbe tartoznak az 1 évnél fiatalabbak, a másodikba az 1 évnél idősebbek. Az első korcsoportbeliek túlélési rátája $p_1$, a második korcsoportbeliek túlélési rátája $p_2$. Az első korcsoport tagjai nem szaporodóképesek, a második korcsoport szaporodási rátája (azaz egy nőstény által évente nemzett nőstény utódok átlagos száma) $f$. Tegyük fel, hogy ha az $n$-dik évben egy nőstény a 2. korcsoportba tartozik és szaporodik, az utódok az $(n+1)$-dik évben születnek. Adjuk meg a Leslie-mátrixot és adjunk becslést a koreloszlásra hosszú távon sajátérték-sajátvektor kalkulátor segítségével[1], ha

*a)* $f = 7$, $p_1 = 0,15$, $p_2 = 0,8$;

*b)* $f = 8,5$, $p_1 = 0,5$, $p_2 = 0,8$.

3. Egy adott lazacfajta legfeljebb 3 évig él, és ezért 3 korcsoportba osztjuk őket. Az első életévet a lazacok 5%-a, a második évet a megmaradt halak 10%-a éli túl. A 3. évben egy átlagos nőstény lazac 2000 nőstény utódot nemz. A lazacok az első két évben még nem szaporodóképesek.

a) Írjuk fel a populáció $3 \times 3$-as Leslie mátrixát.

b) Mi a koreloszlás egy illetve két év múlva, ha kezdetben minden korcsoportban 1000 nőstény lazac van?

c) Sajátérték-sajátvektor kalkulátor segítségével adjuk meg a Leslie-mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Kapunk információt a hosszú távú koreloszlásról?

[1] http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/engl_eigenwert.htm
http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/engl_eigenwert2.htm

4. Egy adott lazacfajta legfeljebb 4 évig él, ezért 4 korcsoportba osztjuk őket. Az első életévet a lazacok $0,5\%$-a, a második évet a megmaradt halak $7\%$-a éli túl. A harmadik évet megérő halak $15\%$-a a negyedik évet is megéri. A 4. évben egy átlagos nőstény lazac 5000 nőstény utódot nemz. A lazacok az első három évben még nem szaporodóképesek.

a) Írjuk fel a populáció $4 \times 4$-es Leslie mátrixát.

b) Mi a koreloszlás egy év múlva, ha kezdetben minden korcsoportban 1000 nőstény lazac van?

c) Sajátérték-sajátvektor kalkulátor segítségével adjuk meg a Leslie-mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Kapunk információt a hosszú távú koreloszlásról?

5. A Strix occidentalis bagolyról azt tudjuk, hogy a általában 2 éves kortól szaporodik és akár 20 évet is élhet. 3 korcsoportba osztjuk a (nőstény) baglyokat: az 1. korcsoportba tartoznak az egy évnél fiatalabb egyedek, a 2. korcsoportba tartoznak a második életévükben járó egyedek, míg a 3. csoportba kerülnek a két évnél idősebb példányok. Jelölje $f_i$ az $i$. korcsoport szaporodási rátáját (egy nőstény átlagosan hány olyan tojást rak, amiből nőstény kel ki), és $p_i$ a túlélési rátát (azaz azt a hányadost, amely megadja, hogy az $i$. korcsoportba tartozó példányok mekkora hányada éri meg a következő évet). Tekintsük úgy, hogy az új esztendő kezdete mindig a tojásrakás idejére esik, azaz ha az $n$-dik évben egy nőstény lerakja a tojásait, akkor a fiókák az $(n+1)$-dik évben kelnek ki.

a) Írjuk fel a Leslie-mátrixot, ha $f_1 = f_2 = 0$, $f_3 = 3$, $p_1 = 0,24$, $p_2 = 0,86$ és $p_3 = 0,87$. Mi lesz a koreloszlás a következő illetve a rákövetkező évben, ha kezdetben 200db két évnél idősebb nőstény bagollyal számolunk és nincsenek fiatalabb egyedek? Sajátérték-sajátvektor kalkulátor segítségével becsüljük a populáció éves növekedését vagy csökkenését illetve a koreloszlást hosszú távon.

b) Ismételjük a feladatot következő (a kaliforniai Klamath tartományban mért) paraméterekkel: $f_1 = 0,09$, $f_2 = 0,2$, $f_3 = 0,33$, $p_1 = 0,325$, $p_2 = p_3 = 0,8677$.

Megoldások:

1. *a)* $\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 22 \end{pmatrix}$; *b)* nem értelemzzük; *c)* $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; *d)* nem értelemzzük;

*e)* $\begin{pmatrix} 19 & -8 & -23 \\ 32 & -2 & -38 \end{pmatrix}$; *f)* $\begin{pmatrix} 56 \\ 30 \\ 73 \end{pmatrix}$.

2. *a)* Leslie-mátrix:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0,15 & 0,8 \end{pmatrix};$$

sajátértékek: $\lambda_1 = 1,5$, $\lambda_2 = -0,7$; $\lambda_1$-hez tartozó sajátvektor:

$$\begin{pmatrix} 14 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(vagy ennek tetszőleges konstansszorosa); becslés a koreloszlásra: 1. korcsoport: $82,35\%$, 2. korcsoport: $17,65\%$.

*b)* Leslie-mátrix:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 8,5 \\ 0,5 & 0,8 \end{pmatrix};$$

sajátértékek: $\lambda_1 = 2,5$, $\lambda_2 = -1,7$; $\lambda_1$-hez tartozó sajátvektor:

$$\begin{pmatrix} 17 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(vagy ennek tetszőleges konstansszorosa); becslés a koreolszlásra: 1. korcsoport: $77,27\%$ , 2. korcsoport: $22,73\%$.

3. *a)* A Leslie-mátrix:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2000 \\ 0,05 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*b)* A koreloszlás 1 illetve 2 év múlva:

$$L \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 10^6 \\ 50 \\ 100 \end{pmatrix} \text{ illetve } L \begin{pmatrix} 2 \cdot 10^6 \\ 50 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 10^5 \\ 10^5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

*c)* $L$ sajátértékei: $\lambda_1 \approx 2,154434690031884$ és $\lambda_{2,3} \approx -1,077217345015942 \pm 1,865795172362064i$. A komplex gyökök abszolút értéke:

$$r \approx \sqrt{(-1,077217345015942)^2 + 1,865795172362064^2} = 2,154434690031884.$$

Nincs információnk a hosszú távú koreloszlásról, mert minden sajátérték abszolút értéke egyenlő.

4. $a$) A Leslie-mátrix:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5000 \\ 0,005 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,07 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,15 & 0 \end{pmatrix}.$$

$b$) A koreloszlás 1 év múlva:

$$L \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 10^6 \\ 5 \\ 70 \\ 150 \end{pmatrix}.$$

$c$) Nem, mert minden sajátérték abszolút értéke egyenlő.

5. $a$) A Leslie-mátrix:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0,24 & 0 & 0 \\ 0 & 0,86 & 0,87 \end{pmatrix}.$$

A koreloszlás 1 év múlva:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0,24 & 0 & 0 \\ 0 & 0,86 & 0,87 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 0 \\ 174 \end{pmatrix},$$

2 év múlva:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0,24 & 0 & 0 \\ 0 & 0,86 & 0,87 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 600 \\ 0 \\ 174 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 522 \\ 144 \\ 151,38 \end{pmatrix}.$$

(Senkit ne zavarjon meg, ha valamelyik korosztályra nem egész számú egyedet kapunk: ez csak egy matematikai modell, csak becsülheti, de nem határozhatja meg a populáció pontos alakulását.) A sajátértékek: $\lambda_1 \approx 1,26$, $\lambda_{2,3} \approx -0,1950 \pm 0,6733i$. A komplex gyökök abszolút értéke:

$$r \approx \sqrt{(-0,1950)^2 + 0,6733^2} \approx 0,701.$$

$\lambda_1$ olyan pozitív valós gyök, amelynek abszolút értéke nagyobb a többi gyöknél $\Rightarrow$ hosszú távon évi 26%-os növekedés várható. Sajátvektor $\lambda_1$-hez:

$$v \approx \begin{pmatrix} 0,9081 \\ 0,173 \\ 0,3814 \end{pmatrix}$$

(vagy ennek tetszőleges konstansszorosa). Így a következő koreloszlás várható hosszú távon: 1. korcsoport: $62,09\%$, 2. korcsoport: $11,83\%$, 3. korcsoport: $26,08\%$.

5. $b$) A Leslie-mátrix:

$$L = \begin{pmatrix} 0,09 & 0,2 & 0,33 \\ 0,325 & 0 & 0 \\ 0 & 0,86 & 0,87 \end{pmatrix}.$$

A koreloszlás 1 év múlva:

$$\begin{pmatrix} 0,09 & 0,2 & 0,33 \\ 0,325 & 0 & 0 \\ 0 & 0,86 & 0,87 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 \\ 0 \\ 174 \end{pmatrix},$$

2 év múlva:

$$\begin{pmatrix} 0,09 & 0,2 & 0,33 \\ 0,325 & 0 & 0 \\ 0 & 0,86 & 0,87 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 66 \\ 0 \\ 174 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63,36 \\ 21,45 \\ 151,38 \end{pmatrix}.$$

(Senkit ne zavarjon meg, ha valamelyik korosztályra nem egész számú egyedet kapunk: ez egy matematikai modell, csak becsülheti, de nem határozhatja meg a populáció pontos alakulását.) A sajátértékek: $\lambda_1 \approx 0,9834$, $\lambda_{2,3} \approx 0,0117 \pm 0,1901i$. A komplex gyökök abszolút értéke:

$$r \approx \sqrt{0,0117^2 + 0,1901^2} \approx 0,1905.$$

$\lambda_1$ olyan pozitív valós gyök, amelynek abszolút értéke nagyobb a többi gyöknél $\Rightarrow$ $\lambda_1$ segítségével becsülhetjük a populáció jövőjét: hosszú távon évi $1,66\%$-os csökkenés várható. Sajátvektor $\lambda_1$-hez:

$$v \approx \begin{pmatrix} 0,3678 \\ 0,1215 \\ 0,9219 \end{pmatrix}$$

(vagy ennek tetszőleges konstansszorosa). Így a következő koreloszlás várható hosszú távon: 1. korcsoport: $26,06\%$, 2. korcsoport: $8,61\%$, 3. korcsoport: $65,33\%$.