Balfelsô fôminorok

Ismétlés

```
A = (1 1 1  1
     1 2 3  4
     1 4 9  16
     1 8 27 64);
```

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix};$$

W = 2

Mátrixok belsô reprezentációja

FullForm[A]

List[List[1, 1, 1, 1], List[1, 2, 3, 4], List[1, 4, 9, 16], List[1, 8, 27, 64]]

Head[1]

Almátrixok, LPM's

Table[MatrixForm[Take[A, j, j]], {j, Length[A]}]

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix} \right\}$$

Table[Det[Take[A, j, j]], {j, Length[A]}]

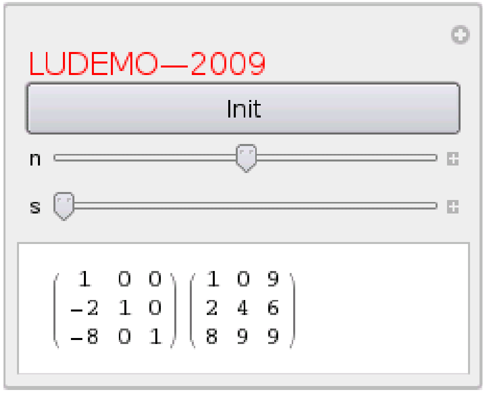
{1, 1, 2, 12}

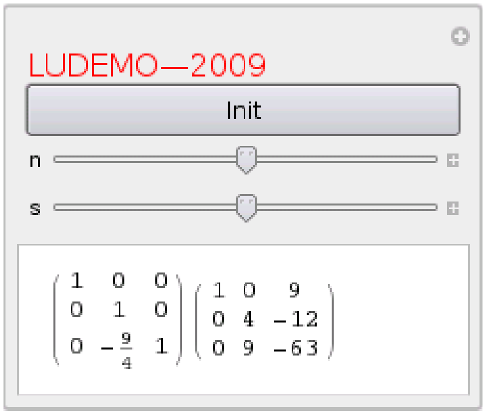
Table[j^2, {j, 1, 5, 2}]

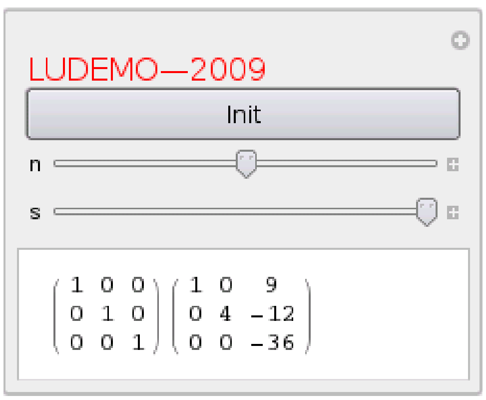
{1, 9, 25}

MYLUDEMO

Gauss elimináció alapalgoritmusa:
Kiindulás: elsö mtx.: elimináló mátrix (L1), második mátrix: A (rendszermátrix)







$$\mathbf{MatrixForm}\left[\mathbf{LUDecomposition}\left[\begin{pmatrix}1&0&9\\2&4&6\\8&9&9\end{pmatrix}\right][[1]]\right]$$

Vegyük észre hogy ebben a mátrixban benne van az LU felbontásra vonatkozó minden információ!

Jordan-Elimináció (Inverz)[1]

Példa. A^{-1}=?, ha $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}3&4\\1&2\end{pmatrix}$;

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};$$

Elemi átalakítások az (A|I) mátrixon

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & -1/3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Black-Box: Built–in Mathematica függvény

```
Inverse[A] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Jordan-Elimináció (Inverz)[2]

Megoldás Jordan elimináció

$$A2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix};$$

s2⟵s2-3s1

$$EA2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.EA2 \; // \; MatrixForm$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.EA2 \; // \; MatrixForm$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.EA2 \; // \; MatrixForm$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Megfelelô elimináló/permutáló/normáló mátrixokal való balról szorzás

```
Inverse[A2] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Jordan-Elimináció (Inverz)[3]

B = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 9 & 1 & 4 \end{pmatrix}$**;**

Det[B]

2

Inverse[B] // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Szimultán egyenletrenszer megoldás: a Az Ax=e2 megoldása a 2. oszlopvektor!

LinearSolve[B, {0, 1, 0}]

$$\left\{-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, 4\right\}$$

Az elsô elimináció eredeménye

BE1 = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$**;**

LL1 = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -9 & 0 & 1 \end{pmatrix}$**;**

LL1.BE1 // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -9 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

N1 = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$**;**

N1.LL1.BE1 // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -9 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

LL2 = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}$**;**

LL2.N1.LL1.BE1 // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

N2 = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$**;**

```
MatrixForm[Inverse[B]]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

```
N2.LL2.N1.LL1.BE1 // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

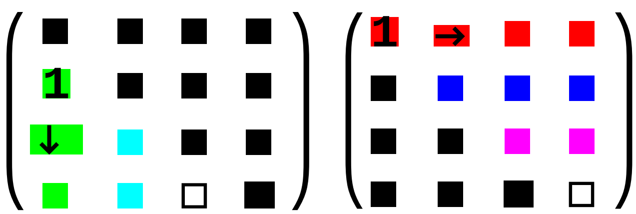
$$\text{LL3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

```
LL3.N2.LL2.N1.LL1.BE1 // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

LR Parketta (implementáció)



- **Cél: LU (LR) felbontás, ahol L alsó triangulá ris, $l_{ii} = 1$**
  U felülrõl triangulá ris

Megj. Nem minden mátrixnak létezik, még akkor sem, ha az nemszinguláris.
Ha létezik, nem feltétlen egyértelmű.

Black Box: Mathematica LUDecomposition[mat]
White Box: LU0

Vigyázat! Az egyszerűség kedvéért L,U globális változók.

```
Clear[A]; Clear[LU0];
```

Init

```
LU0[A_] :=
 (L = IdentityMatrix[Length[A]]; U = DiagonalMatrix[Table[0, {i, Length[A]}]]; LU0[A, 1])
```

$U_{j\,k}$ megh.: $a_{j\,k} = \sum_{l=1}^{j-1} L_{j\,l}\, U_{l\,k} + U_{j\,k}$

$L_{k\,j}$ has.

```
LU0[A_, j_] /; j > Length[A] := {L, U};
LU0[A_, j_] :=
 (For[k = j, k ≤ Length[A], k++, U⟦j, k⟧ = A⟦j, k⟧ - Sum[L⟦j, l⟧ U⟦l, k⟧, {l, j - 1}]];
  If[j < Length[A], For[k = j + 1, k ≤ Length[A], k++,
    L⟦k, j⟧ = If[U[[j, j]] ≠ 0, (A⟦k, j⟧ - Sum[L⟦k, l⟧ U⟦l, j⟧, {l, j - 1}]) / U⟦j, j⟧,
      If[A⟦k, j⟧ - Sum[L⟦k, l⟧ U⟦l, j⟧, {l, j - 1}] == 0, 1, "x"]]]]; LU0[A, j + 1])
```

- **Adjuk meg (egy) LR felbontást (ha létezik)**

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -3 & 2 & 1 \\ 6 & 8 & -1 \end{pmatrix}; B2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

oldjuk meg LR seg-vel a Bx=b rendszert, ha b={-1,1,35}!

```
{LL, UU} = LU0[B]
```

```
{{{1, 0, 0}, {-1, 1, 0}, {2, -8, 1}}, {{3, -4, 5}, {0, -2, 6}, {0, 0, 37}}}
```

```
LinearSolve[LL, {-1, 1, 35}]
```

```
{-1, 0, 37}
```

```
LinearSolve[UU, %]
```

```
{2, 3, 1}
```

```
Map[MatrixForm, LU0[B]]
```

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -8 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 37 \end{pmatrix} \right\}$$

- ***Prog. Tech.**

IF
If[cond,Truebranch,Falsebranch]

```
test1[x_] := If[x > 10, 2 x, x^2]
```

```
test1[3]
```

```
test1[11]
```

For - klasszikus ciklus (s,i glob.)
For[init,cond,inc,body]

```
For[s = 0; i = 0, i ≤ 10, i++, s = s + i]; s
```

- **Feladat: Adjuk meg A1,B1 LU felbontását az algoritmussal és ellenõrizzük a felbontás helyességét!**

- ***Hint**

- **Feladat: Teszteljük LU0-t olyan 2x2-es mátrixokkal, amelynek nem létezik (egy.) felbontása!**

pl. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (az outputban szereplô x jelzi a hibát) Indoklás: a21=l21*u11+1*0 $\Longrightarrow$ nem létezik ilyen l21

```
LU0[(0 0
     1 1)]
```

```
{{{1, 0}, {x, 1}}, {{0, 0}, {0, 1}}}
```

H+PD Teszt

$$M1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};\ M2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix};\ M3 = \begin{pmatrix} 1 & -2+i & i \\ -3-2i & i & -3 \\ 12 & -3 & 3 \end{pmatrix};\ M4 = \begin{pmatrix} 1 & -2+i & i \\ -2-i & 19 & -3 \\ -i & -3 & 3 \end{pmatrix};\ M5 = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix};$$

Hermite-Szimmetria Teszt
Pozitív Definit Teszt (Sylvester)
Pozitív SzemiDefinit Teszt

```
HermitianQ[m_List ? MatrixQ] := (m === ConjugateTranspose[m])
```

```
HermitianQ[M1]
```

```
False
```

Poz.Def. teszt balfelsô fôminorok segítségével

```
PDQ[m_List ? MatrixQ] := And @@ Map[Det[#] > 0 &, Table[Take[m, j, j], {j, Length[m]}]]
```

```
M4 // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -2+i & i \\ -2-i & 19 & -3 \\ -i & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

```
PDQ[M4]
```

```
True
```

fôminorok kinyerése

```
Map[MatrixForm[#] &, PDQ[(1 2 3 4 5
                         0 1 0 0 0
                         0 0 1 0 0
                         0 0 0 1 0
                         0 0 0 0 1)]]
```

PSZD-e? $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

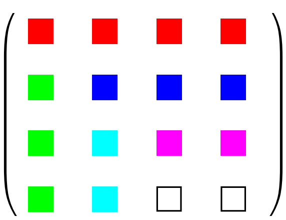
```
{1, 2, -4}.(1 1 1
            1 1 1
            1 1 0).{1, 2, -4}
```

Cáfolat: Nem lehet $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ PSZD

Kvadratikus alak ált alakja (valós eset)

```
Clear[A]
AA = Table[A[j, k], {j, 3}, {k, 3}];
{x1, x2, x3}.AA.{x1, x2, x3} // Expand
```

R^H R felbontás parkettázással (Cholesky) [LL^T]



- **Feladat**

Adjuk meg a Cholesky felbontást.

```
B = (1 2
     2 9);
```

- **Megoldás**

□ White-Box: a parketta algoritmus lépésrôl lépésre.

$B = R^T\ R = \begin{pmatrix} r_{11} & 0 \\ r_{12} & r_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{pmatrix}$

$r_{11}{}^2 = 1 \Longrightarrow r_{11} = 1\ r_{12} = 2\ ,\ \ r_{22}{}^2 = 5 \Longrightarrow r_{22} = \sqrt{5}$

■ Black-Box: A Mathematica built–in függvény a felbontás jobboldali komponensét adja.

```
R = CholeskyDecomposition[B];
```

```
MatrixForm[R]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

```
{MatrixForm[Transpose[R]], MatrixForm[R]}
```

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \sqrt{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}\right\}$$

$B = R^H\ R$

```
MatrixForm[Transpose[R].R]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$$