Lineáris Algebra

```
1 + 3
```

4

Lineáris egyenletrendszermegoldás [csak mintamegold!]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};\ b = \{.5, .1\};$$

```
LinearSolve[A, b]
```

{0.3, 0.2}

```
Det[A]
```

−2

```
Minors[A, 1]
```

{{1, 1}, {1, −1}}

```
Minors[A, 2]
```

{{−2}}

```
MatrixForm[Inverse[A]]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

```
{1, 2, 3}.{2, 3, 4}
```

20

```
MatrixRank[A]
```

2

```
NullSpace[{{1, 1}, {1, 1}}]
```

{{−1, 1}}

```
MatrixForm[ConjugateTranspose[{{1, 2 + I}, {1 - 3 I, 2}}]]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 + 3 i \\ 2 - i & 2 \end{pmatrix}$$

Értéladás, mátrixbeviteli módok

```
W = {{1, 2}, {3, 4}}
```

{{1, 2}, {3, 4}}

```
MatrixForm[W]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$W2 = \begin{pmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{pmatrix}$$

Speciális mátrixok

```
IdentityMatrix[4]
```

{{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}}

```
MatrixForm[DiagonalMatrix[{d1, d2, d3}]]
```

$$\begin{pmatrix} d1 & 0 & 0 \\ 0 & d2 & 0 \\ 0 & 0 & d3 \end{pmatrix}$$

```
MatrixForm[Table[If[j == k, 1, If[j > k, l[j, k], 0]], {j, 4}, {k, 4}]]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l[2,1] & 1 & 0 & 0 \\ l[3,1] & l[3,2] & 1 & 0 \\ l[4,1] & l[4,2] & l[4,3] & 1 \end{pmatrix}$$

Balfelsô fôminorok

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix};$$

```
W = 2
```

2

```
FullForm[A]
```

List[List[1, 1, 1, 1], List[1, 2, 3, 4], List[1, 4, 9, 16], List[1, 8, 27, 64]]

```
Head[1]
```

Integer

```
Table[MatrixForm[Take[A, j, j]], {j, Length[A]}]
```

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix} \right\}$$

```
Table[Det[Take[A, j, j]], {j, Length[A]}]
```

{1, 1, 2, 12}

```
Table[j^2, {j, 1, 5, 2}]
```

{1, 9, 25}

Elimináló és permutáló mátrixok

```
A = {{1, -4, 0}, {-4, -2, 5}, {0, 5, 3}};
MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -4 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Kérdések: I23I13A, AI12I23, I23AI23
N1I14A2

```
II[m_, n_, s_] :=
 Table[If[j == m, UnitVector[s, n], If[j == n, UnitVector[s, m], UnitVector[s, j]]], {j, s}]
MatrixForm[II[1, 2, 4]]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
MatrixForm[II[2, 3, 3].II[1, 3, 3].A]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 1 & -4 & 0 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

```
MatrixForm[II[2, 3, 3].A.II[2, 3, 3]]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ -4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

```
MatrixForm[A.II[1, 2, 3], II[2, 3, 3]]
```

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 5 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

```
A2 = {{0, 1, 2, -3}, {3, 8, 0, 4}, {-2, 9, -5, 0}, {4, 0, 6, 2}};
MatrixForm[II[1, 4, 4].A2]
```

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 & 2 \\ 3 & 8 & 0 & 4 \\ -2 & 9 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

```
N1 = (  1    0 0 0 )
     ( -3/4  1 0 0 )
     (  1/2  0 1 0 )
     (  0    0 0 1 );
MatrixForm[N1.II[1, 4, 4].A2]
```

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 8 & -\frac{9}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 9 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Gauss-elimináció (alapalg.) [1]

Csak szab. lin. egyr. összes balf. fôminor nemzéró
Gauss-elimináció alapalgoritmusa
a) fázis nullázás (A/ b)~(U|b') 1a) tip. sorátalakításokkal
b) fázis visszahelyettesítés (↑)

```
LinearSolve[( 3 -4  5 )
            (-3  2  1 )
            ( 6  8 -1 ), {-1, 1, 35}]
{2, 3, 1}
```

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ 6 & 8 & -1 & 35 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 16 & -11 & 37 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 37 & 37 \end{pmatrix}$$

[(1) $a_{11} \neq 0$, s2 ← s2 + s1, (2) s3←s3-2s1] ,[(3) s3←s3+8s2]
$b)$ $x_3 = 1 \Longrightarrow x_2 = 3 \Longrightarrow x_1 = 2$

```
LinearSolve[( 3 -4  5 )
            ( 0 -2  6 )
            ( 0  0 37 ), {-1, 0, 37}]
{2, 3, 1}
LinearSolve[( 3 -4  5 )
            (-3  2  1 )
            ( 6  8 -1 ), {-1, 1, 35}]
{2, 3, 1}
```

Gauss-elimináció (alapalg.) [2]

- **Feladat**

$x_1 + x_2 + x_3 = 7$
$4\ x_1 + 3\ x_2 + 4\ x_3 = 8$
$9\ x_1 + 3\ x_2 + 4\ x_3 = 3$

Megoldás

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 4 & 8 \\ 9 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & -20 \\ 0 & -6 & -5 & -60 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & -5 & 60 \end{pmatrix}$$

[(1) $a_{11} \neq 0$, s2 ← s2 − 4 s1, (2) s3←s3-9s1,...]

```
Solve[{x1 + x2 + x3 == 7, 4 x1 + 3 x2 + 4 x3 == 8, 9 x1 + 3 x2 + 4 x3 == 3}, {x1, x2, x3}]
```

$\{\{x_1 \to -1, x_2 \to 20, x_3 \to -12\}\}$

```
Solve[{x1 + x2 + x3 == 7, 0 x1 - x2 + 0 x3 == -20, 0 x1 + 0 x2 - 5 x3 == 60}, {x1, x2, x3}]
```

$\{\{x_1 \to -1, x_2 \to 20, x_3 \to -12\}\}$

Elemi átalakítások mátrixszorzással

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -9 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 9 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ // MatrixForm}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 9 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \; L1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -9 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

```
L1.A // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$L2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \end{pmatrix};$$

```
L2.L1.A // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

```
U = L2.L1.A;
MatrixForm[U]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

```
L = Inverse[L1].Inverse[L2]; L // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 9 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Megkonstruáltuk az LU felbontást is.

```
L.U // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 9 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

```
A // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 9 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

```
{MatrixForm[L], MatrixForm[U], MatrixForm[A]}
```

Gauss-elimináció (alapalg.) [3]

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 + 8x_3 &= 5 \\ x_1 + 5x_2 + 7x_3 &= 4 \\ 7x_1 + 7x_2 + 2x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Gauss-elimináció (részl. fôelemkiv.) [1]

Részleges fôelemkiválasztás
Megjegyzés. Numerikus szempontok miatt akkor is szükség lehet rá, ha $M_j \neq 0$

Mutassuk meg, hogy nem minden balfelsô fôminor nemzéró és oldjuk meg a rendszert a módosított algoritmussal

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 8 & 9 \\ -6 & 3 & -7 & 9.5 \end{pmatrix} \text{M1≠0, M2=0, M3≠0}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 8 & 9 \\ -6 & 3 & -7 & 9.5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 15 & 23 & 33.5 \end{pmatrix} \sim_{(s2\leftrightarrow s3)\ \text{sorcsere}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 15 & 23 & 33.5 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

LinearSolve $\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 15 & 23 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \{4, 33.5, 1\}\right]$

{0.5, 3., -0.5}

LinearSolve $\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \\ -6 & 3 & -7 \end{pmatrix}, \{4, 9, 9.5\}\right]$

{0.5, 3., -0.5}

Itt: M1 = 0

LinearSolve $\left[\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \{4, -6, 0\}\right]$

$\left\{\frac{8}{9}, -\frac{2}{3}, -\frac{16}{9}\right\}$