Kongruenciareláció, faktoralgebra, homomorfizmus

Legyen $*$ egy kétváltozós művelet a nemüres A halmazon: $*\colon A \times A \to A,\ (a, b) \mapsto a * b$. Ekkor az $\mathbb{A} = (A; *)$ algebrai struktúrát **grupoidnak** nevezzük.

Legyen $\sim$ egy ekvivalenciareláció az A halmazon. Azt mondjuk, hogy $\sim$ **kongruenciarelációja** az $\mathbb{A}$ grupoidnak, ha tetszőleges $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$ elemek esetén

$$\left.\begin{aligned} a_1 &\sim b_1 \\ a_2 &\sim b_2 \end{aligned}\right\} \implies a_1 * a_2 \ \sim \ b_1 * b_2.$$

Ekkor az $A/{\sim}$ osztályozás **kompatibilis** a $*$ művelettel, azaz tetszőleges $C_1, C_2 \in A/{\sim}$ ekvivalenciaosztályokhoz létezik egy olyan $D \in A/{\sim}$ osztály, amelyre

$$\{\, a_1 * a_2 \mid a_1 \in C_1,\ a_2 \in C_2 \,\} \subseteq D.$$

Példa

Kompatibilis osztályozása-e $\mathcal{C} = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e\}\}$ az alábbi grupoidnak?

$$\mathbb{G} = \begin{array}{c|ccccc} * & a & b & c & d & e \\ \hline a & c & b & c & c & e \\ b & a & c & c & e & c \\ c & a & e & c & c & e \\ d & a & d & c & d & d \\ e & a & c & c & e & c \end{array}$$

Példa

Kompatibilis osztályozása-e $\mathcal{C} = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e\}\}$ az alábbi grupoidnak?

$$\mathbb{G} = \begin{array}{c|ccccc} * & a & b & c & d & e \\ \hline a & c & b & c & c & e \\ b & a & c & c & e & c \\ c & a & e & c & c & e \\ d & a & d & c & d & d \\ e & a & c & c & e & c \end{array}$$

Példa

Kompatibilis osztályozása-e $\mathcal{C} = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e\}\}$ az alábbi grupoidnak?

$\mathbb{G} =$

$*$	a	b	c	d	e
a	c	b	c	c	e
b	a	c	c	e	c
c	a	e	c	c	e
d	a	d	c	d	d
e	a	c	c	e	c

Nem, pl. $a \sim b$ és $c \sim d$, de $a * c \nsim b * d$
(azaz $\blacksquare * \blacksquare$ nem jóldefiniált).

Példa

Kompatibilis osztályozása-e $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{b, c, d, e\}\}$ az alábbi grupoidnak?

$$\mathbb{G} = \begin{array}{c|ccccc} * & a & b & c & d & e \\ \hline a & c & b & c & c & e \\ b & a & c & c & e & c \\ c & a & e & c & c & e \\ d & a & d & c & d & d \\ e & a & c & c & e & c \end{array}$$

Példa

Kompatibilis osztályozása-e $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{b, c, d, e\}\}$ az alábbi grupoidnak?

$$\mathbb{G} = \begin{array}{c|ccccc} * & a & b & c & d & e \\ \hline a & c & b & c & c & e \\ b & a & c & c & e & c \\ c & a & e & c & c & e \\ d & a & d & c & d & d \\ e & a & c & c & e & c \end{array}$$

Példa

Kompatibilis osztályozása-e $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{b, c, d, e\}\}$ az alábbi grupoidnak?

$\mathbb{G} =$

$*$	a	b	c	d	e
a	c	b	c	c	e
b	a	c	c	e	c
c	a	e	c	c	e
d	a	d	c	d	d
e	a	c	c	e	c

Igen, bármely két szín szorzata jóldefiniált:

$${\color{red}\blacksquare} * {\color{red}\blacksquare} = {\color{blue}\blacksquare}, \quad {\color{red}\blacksquare} * {\color{blue}\blacksquare} = {\color{blue}\blacksquare}, \quad {\color{blue}\blacksquare} * {\color{red}\blacksquare} = {\color{red}\blacksquare}, \quad {\color{blue}\blacksquare} * {\color{blue}\blacksquare} = {\color{blue}\blacksquare}.$$

Legyen $\mathbb{A} = (A; *)$ egy grupoid, legyen $\sim$ egy kongruenciarelációja $\mathbb{A}$-nak, és legyen $\mathcal{C} = A/{\sim}$ a megfelelő kompatibilis osztályozás. Értelmezzük a kongruenciaosztályok halmazán a $\circledast$ műveletet a következőképpen: tetszőleges $C_1, C_2 \in A/{\sim}$ esetén legyen $C_1 \circledast C_2$ az az egyértelműen meghatározott $D \in A/{\sim}$ kongruenciaosztály, amelyre

$$\{\, a_1 * a_2 \mid a_1 \in C_1,\ a_2 \in C_2 \,\} \subseteq D.$$

Az így kapott $\mathbb{A}/{\sim} = (A/{\sim}; \circledast)$ algebrát nevezzük az $\mathbb{A}$ algebra $\sim$ kongruencia szerinti **faktoralgebrájának**.

Általában $\overline{a}$ jelöli az $a \in A$ elem $\sim$ szerinti ekvivalenciaosztályát. Ezzel a jelöléssel a faktoralgebra művelete így definiálható:

$$\overline{a_1} \circledast \overline{a_2} \;=\; \overline{a_1 * a_2}.$$

Az osztályozás kompatibilitása garantálja, hogy ez a művelet jóldefiniált, azaz az eredmény nem függ a reprezentánsok választásától.

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{G}/\sim$ faktorgrupoidot, ahol $\sim$ a $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{b, c, d, e\}\}$ osztályozáshoz tartozó kongruencia.

$$\mathbb{G} = \begin{array}{c|ccccc} * & a & b & c & d & e \\ \hline a & c & b & c & c & e \\ b & a & c & c & e & c \\ c & a & e & c & c & e \\ d & a & d & c & d & d \\ e & a & c & c & e & c \end{array}$$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{G}/\sim$ faktorgrupoidot, ahol $\sim$ a $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{b, c, d, e\}\}$ osztályozáshoz tartozó kongruencia.

$\mathbb{G} =$

$*$	a	b	c	d	e
a	c	b	c	c	e
b	a	c	c	e	c
c	a	e	c	c	e
d	a	d	c	d	d
e	a	c	c	e	c

$*$	$\color{red}\blacksquare$	$\color{blue}\blacksquare$
$\color{red}\blacksquare$	$\color{blue}\blacksquare$	$\color{blue}\blacksquare$
$\color{blue}\blacksquare$	$\color{red}\blacksquare$	$\color{blue}\blacksquare$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{G}/\sim$ faktorgrupoidot, ahol $\sim$ a $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{b, c, d, e\}\}$ osztályozáshoz tartozó kongruencia.

$\mathbb{G} =$

$*$	a	b	c	d	e
a	c	b	c	c	e
b	a	c	c	e	c
c	a	e	c	c	e
d	a	d	c	d	d
e	a	c	c	e	c

$\mathbb{G}/\sim =$

$*$	$\{a\}$	$\{b, c, d, e\}$
$\{a\}$	$\{b, c, d, e\}$	$\{b, c, d, e\}$
$\{b, c, d, e\}$	$\{a\}$	$\{b, c, d, e\}$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{G}/\sim$ faktorgrupoidot, ahol $\sim$ a $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{b, c, d, e\}\}$ osztályozáshoz tartozó kongruencia.

$$\mathbb{G} = \begin{array}{c|ccccc} * & a & b & c & d & e \\ \hline a & c & b & c & c & e \\ b & a & c & c & e & c \\ c & a & e & c & c & e \\ d & a & d & c & d & d \\ e & a & c & c & e & c \end{array}$$

$$\mathbb{G}/\sim \; = \begin{array}{c|cc} * & A & B \\ \hline A & B & B \\ B & A & B \end{array}, \quad \text{ahol } A = \{a\} \text{ és } B = \{b, c, d, e\}$$

Pl. $B * B = \overline{b} * \overline{b} = \overline{b * b} = \overline{c} = B$.

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{G}/\sim$ faktorgrupoidot, ahol $\sim$ a $\mathcal{C} = \{\{a, c\}, \{b, e\}, \{d\}\}$ osztályozáshoz tartozó kongruencia.

$$\mathbb{G} = \begin{array}{c|ccccc} * & a & b & c & d & e \\ \hline a & c & b & c & c & e \\ b & a & c & c & e & c \\ c & a & e & c & c & e \\ d & a & d & c & d & d \\ e & a & c & c & e & c \end{array}$$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{G}/\sim$ faktorgrupoidot, ahol $\sim$ a $\mathcal{C} = \{\{a, c\}, \{b, e\}, \{d\}\}$ osztályozáshoz tartozó kongruencia.

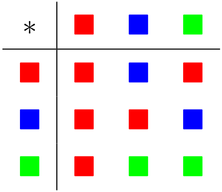
$$\mathbb{G} = \begin{array}{c|ccccc} * & a & b & c & d & e \\ \hline a & c & b & c & c & e \\ b & a & c & c & e & c \\ c & a & e & c & c & e \\ d & a & d & c & d & d \\ e & a & c & c & e & c \end{array}$$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{G}/\sim$ faktorgrupoidot, ahol $\sim$ a $\mathcal{C} = \{\{a, c\}, \{b, e\}, \{d\}\}$ osztályozáshoz tartozó kongruencia.

$\mathbb{G} =$

$*$	a	b	c	d	e
a	c	b	c	c	e
b	a	c	c	e	c
c	a	e	c	c	e
d	a	d	c	d	d
e	a	c	c	e	c



Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{G}/\sim$ faktorgrupoidot, ahol $\sim$ a $\mathcal{C} = \{\{a, c\}, \{b, e\}, \{d\}\}$ osztályozáshoz tartozó kongruencia.

$\mathbb{G} =$

$*$	a	b	c	d	e
a	c	b	c	c	e
b	a	c	c	e	c
c	a	e	c	c	e
d	a	d	c	d	d
e	a	c	c	e	c

$\mathbb{G}/\sim =$

$*$	$\{a, c\}$	$\{b, e\}$	$\{d\}$
$\{a, c\}$	$\{a, c\}$	$\{b, e\}$	$\{a, c\}$
$\{b, e\}$	$\{a, c\}$	$\{a, c\}$	$\{b, e\}$
$\{d\}$	$\{a, c\}$	$\{d\}$	$\{d\}$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{G}/\!\sim$ faktorgrupoidot, ahol $\sim$ a $\mathcal{C} = \{\{a, c\}, \{b, e\}, \{d\}\}$ osztályozáshoz tartozó kongruencia.

$$\mathbb{G} = \begin{array}{c|ccccc} * & a & b & c & d & e \\ \hline a & c & b & c & c & e \\ b & a & c & c & e & c \\ c & a & e & c & c & e \\ d & a & d & c & d & d \\ e & a & c & c & e & c \end{array}$$

$$\mathbb{G}/\!\sim = \begin{array}{c|ccc} * & A & B & D \\ \hline A & A & B & A \\ B & A & A & B \\ D & A & D & D \end{array}$$, ahol $A = \{a, c\}$, $B = \{b, e\}$ és $D = \{d\}$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{G}/\sim$ faktorgrupoidot, ahol $\sim$ a $\mathcal{C} = \{\{a, b, c, e\}, \{d\}\}$ osztályozáshoz tartozó kongruencia.

$$\mathbb{G} = \begin{array}{c|ccccc} * & a & b & c & d & e \\ \hline a & c & b & c & c & e \\ b & a & c & c & e & c \\ c & a & e & c & c & e \\ d & a & d & c & d & d \\ e & a & c & c & e & c \end{array}$$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{G}/\sim$ faktorgrupoidot, ahol $\sim$ a $\mathcal{C} = \{\{a, b, c, e\}, \{d\}\}$ osztályozáshoz tartozó kongruencia.

$$\mathbb{G} = \begin{array}{c|ccccc} * & a & b & c & d & e \\ \hline a & c & b & c & c & e \\ b & a & c & c & e & c \\ c & a & e & c & c & e \\ d & a & d & c & d & d \\ e & a & c & c & e & c \end{array}$$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{G}/\!\sim$ faktorgrupoidot, ahol $\sim$ a $\mathcal{C} = \{\{a, b, c, e\}, \{d\}\}$ osztályozáshoz tartozó kongruencia.

$\mathbb{G} =$

$*$	a	b	c	d	e
a	c	b	c	c	e
b	a	c	c	e	c
c	a	e	c	c	e
d	a	d	c	d	d
e	a	c	c	e	c

$*$	${\color{red}\blacksquare}$	${\color{blue}\blacksquare}$
${\color{red}\blacksquare}$	${\color{red}\blacksquare}$	${\color{red}\blacksquare}$
${\color{blue}\blacksquare}$	?	${\color{blue}\blacksquare}$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{G}/\sim$ faktorgrupoidot, ahol $\sim$ a $\mathcal{C} = \{\{a, b, c, e\}, \{d\}\}$ osztályozáshoz tartozó kongruencia.

$\mathbb{G} =$

$*$	a	b	c	d	e
a	c	b	c	c	e
b	a	c	c	e	c
c	a	e	c	c	e
d	a	d	c	d	d
e	a	c	c	e	c

$*$	${\color{red}\blacksquare}$	${\color{blue}\blacksquare}$
${\color{red}\blacksquare}$	${\color{red}\blacksquare}$	${\color{red}\blacksquare}$
${\color{blue}\blacksquare}$	?	${\color{blue}\blacksquare}$

Ez nem kongruencia, pl. $d \sim d$ és $a \sim b$, de $d * a \nsim d * b$.

A számelméleti kongruencia is kongruencia(!):

$$\left.\begin{aligned} a_1 &\equiv b_1 \pmod m \\ a_2 &\equiv b_2 \pmod m \end{aligned}\right\} \implies \begin{aligned} a_1 + a_2 &\equiv b_1 + b_2 \pmod m\,, \\ a_1 \cdot a_2 &\equiv b_1 \cdot b_2 \pmod m\,. \end{aligned}$$

Példa

Modulo 7 maradékosztályok összeadása:

$$\{\dots, -5, \mathbf{2}, 9, 16, \dots\} + \{\dots, -3, \mathbf{4}, 11, 18, \dots\} = \overline{2} + \overline{4} = \overline{6} =$$

$$= \{\dots, -1, \mathbf{6}, 13, 20, \dots\}$$

$$\{\dots, -5, 2, \mathbf{9}, 16, \dots\} + \{\dots, -3, 4, \mathbf{11}, 18, \dots\} = \overline{9} + \overline{11} = \overline{20} =$$

$$= \{\dots, -1, 6, 13, \mathbf{20}, \dots\}$$

Az eredmény nem függ a reprezentánsok választásától.

Példa

A $(\mathbb{Z}_3; +, \cdot)$ gyűrű művelettáblázatai:

$\mathbb{Z} = \{\dots, {\color{blue}-3}, {\color{red}-2}, {\color{green}-1}, {\color{blue}0}, {\color{red}1}, {\color{green}2}, {\color{blue}3}, {\color{red}4}, {\color{green}5}, {\color{blue}6}, {\color{red}7}, {\color{green}8}, {\color{blue}9}, {\color{red}10}, {\color{green}11}, \dots\}$

$+$	${\color{blue}\blacksquare}$	${\color{red}\blacksquare}$	${\color{green}\blacksquare}$
${\color{blue}\blacksquare}$	${\color{blue}\blacksquare}$	${\color{red}\blacksquare}$	${\color{green}\blacksquare}$
${\color{red}\blacksquare}$	${\color{red}\blacksquare}$	${\color{green}\blacksquare}$	${\color{blue}\blacksquare}$
${\color{green}\blacksquare}$	${\color{green}\blacksquare}$	${\color{blue}\blacksquare}$	${\color{red}\blacksquare}$

$\cdot$	${\color{blue}\blacksquare}$	${\color{red}\blacksquare}$	${\color{green}\blacksquare}$
${\color{blue}\blacksquare}$	${\color{blue}\blacksquare}$	${\color{blue}\blacksquare}$	${\color{blue}\blacksquare}$
${\color{red}\blacksquare}$	${\color{blue}\blacksquare}$	${\color{red}\blacksquare}$	${\color{green}\blacksquare}$
${\color{green}\blacksquare}$	${\color{blue}\blacksquare}$	${\color{green}\blacksquare}$	${\color{red}\blacksquare}$

${\color{blue}\blacksquare} = \{\dots, {\color{blue}-3, 0, 3, 6, 9}, \dots\}$

${\color{red}\blacksquare} = \{\dots, {\color{red}-2, 1, 4, 7, 10}, \dots\}$

${\color{green}\blacksquare} = \{\dots, {\color{green}-1, 2, 5, 8, 11}, \dots\}$

Példa

Határozzuk meg az $(\mathbb{R};\cdot)$ algebra $\sim$ szerinti faktoralgebráját, ahol

$$a \sim b \iff \operatorname{sgn} a = \operatorname{sgn} b.$$

$$\mathbb{R}/\!\sim\, = \{\, \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-, \{0\} \,\}$$

$$(\mathbb{R};\cdot)\,/\!\sim\, = \begin{array}{c|ccc} \cdot & \{0\} & \mathbb{R}^+ & \mathbb{R}^- \\ \hline \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} \\ \mathbb{R}^+ & \{0\} & \mathbb{R}^+ & \mathbb{R}^- \\ \mathbb{R}^- & \{0\} & \mathbb{R}^- & \mathbb{R}^+ \end{array} \cong \begin{array}{c|ccc} \cdot & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \\ \hline \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{2} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{1} \end{array} = (\mathbb{Z}_3;\cdot)$$

Példa

Határozzuk meg az $(\mathbb{R}; +)$ algebra $\sim$ szerinti faktoralgebráját, ahol

$$a \sim b \iff \operatorname{sgn} a = \operatorname{sgn} b.$$

Ez nem kongruencia, mert az összeg előjelét nem határozza meg egyértelműen az összeadandók előjele.

Például $2 \sim 5$ és $-6 \sim -4$, de $(2 + (-6)) \nsim (5 + (-4))$.

$\leftrightarrow$	igaz	hamis
igaz	igaz	hamis
hamis	hamis	igaz

$\cdot$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

izomorf struktúrák

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$

$\otimes$		
		
		

Az $\mathbb{A} = (\{$  ,  $\}; \otimes)$ és a $\mathbb{B} = (\{\bar{0}, \bar{1}\}\,; +)$ algebrák szerkezete ugyanaz: ha $\mathbb{A}$ művelettáblázatában minden  -t átnevezünk $\bar{0}$-ra, és minden  -ot átnevezünk $\bar{1}$-ra, akkor éppen $\mathbb{B}$ művelettáblázatát kapjuk:

$\otimes$		
		
		

$$\xrightarrow{\text{átnevezés}}$$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

Ezt az „átnevezést” a

$\varphi\colon \{$  ,  $\} \to \{\bar{0}, \bar{1}\}$,  $\mapsto \bar{0}$,  $\mapsto \bar{1}$

leképezéssel írhatjuk le. Az átnevezés „jogossága” pedig a következőképpen fogalmazható meg:

$\forall a_1, a_2 \in \{$  ,  $\}$: $(a_1 \otimes a_2)\,\varphi \;=\; (a_1\varphi) + (a_2\varphi)\,.$

Definíció

Legyen $\mathbb{A} = (A; *)$ és $\mathbb{B} = (B; \oplus)$ két grupoid. Azt mondjuk, hogy a $\varphi\colon A \to B$ leképezés **izomorfizmus** $\mathbb{A}$-ból $\mathbb{B}$-be, ha

1. φ bijektív leképezés, és
2. φ **felcserélhető a műveletekkel**, azaz

$$\forall a_1, a_2 \in A : \quad (a_1 * a_2)\,\varphi \;=\; a_1\varphi \,\oplus\, a_2\varphi.$$

Ha létezik $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ izomorfizmus, akkor azt mondjuk, hogy $\mathbb{A}$ és $\mathbb{B}$ **izomorf** . Jelölés: $\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$.

Megjegyzés

Az izomorfizmus tetszőleges algebrákra hasonló módon definiálható: a φ leképezésnek az algebrák minden műveletével felcserélhetőnek kell lennie.
Például $\mathbb{A} = (A; +, \cdot)$ és $\mathbb{B} = (B; +, \cdot)$ esetén:

$$\forall a_1, a_2 \in A : \quad (a_1 + a_2)\,\varphi \;=\; a_1\varphi + a_2\varphi, \text{ és}$$
$$\forall a_1, a_2 \in A : \quad (a_1 \cdot a_2)\,\varphi \;=\; a_1\varphi \cdot a_2\varphi.$$

Definíció

Legyen $\mathbb{A} = (A; *)$ és $\mathbb{B} = (B; \oplus)$ két grupoid. Azt mondjuk, hogy a $\varphi\colon A \to B$ leképezés **beágyazás** $\mathbb{A}$-ból $\mathbb{B}$-be, ha

1. φ injektív leképezés, és
2. φ **felcserélhető a műveletekkel**, azaz

$$\forall a_1, a_2 \in A: \quad (a_1 * a_2)\,\varphi \;=\; a_1\varphi \,\oplus\, a_2\varphi.$$

Ha létezik $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ beágyazás, akkor $\mathbb{A}$ izomorf a $\mathbb{B}$ algebra $\mathbb{A}\varphi$ részalgebrájával: $\mathbb{A} \cong \mathbb{A}\varphi \leq \mathbb{B}$. Jelölés: $\mathbb{A} \hookrightarrow \mathbb{B}$.

Példa

- $\mathbb{N}_0 \hookrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$
- $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$
- $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}[x]$
- $D_n \hookrightarrow S_n$

Definíció

Legyen $\mathbb{A} = (A; *)$ és $\mathbb{B} = (B; \oplus)$ két grupoid. Azt mondjuk, hogy a $\varphi\colon A \to B$ leképezés **homomorfizmus** $\mathbb{A}$-ból $\mathbb{B}$-be, ha

1.
2. φ **felcserélhető a műveletekkel**, azaz

$$\forall a_1, a_2 \in A : \quad (a_1 * a_2)\varphi \;=\; a_1\varphi \oplus a_2\varphi.$$

Ha létezik $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ szürjektív homomorfizmus, akkor azt mondjuk, hogy $\mathbb{B}$ **homomorf képe** $\mathbb{A}$-nak.

Tétel (homomorfiatétel)

A homomorf képek és a faktoralgebrák lényegében ugyanazok:

- *Ha $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ szürjektív homomorfizmus, akkor létezik olyan $\sim$ kongruenciarelációja $\mathbb{A}$-nak, amelyre $\mathbb{A}/\!\sim\, \cong \mathbb{B}$.*
- *Ha $\sim$ kongruenciarelációja $\mathbb{A}$-nak, akkor létezik $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}/\!\sim$ szürjektív homomorfizmus.*