A komplex számokon túl

Tartalom

Tartalom

A komplex számok teste

Definíció.

Definiáljuk a valós számpárok halmazán az összeadás és a szorzás műveletét a következőképpen:

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)\,;$$

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)\,.$$

Tétel.

A fenti műveletekkel $\left(\mathbb{R}^2; +, \cdot\right)$ test.

- additív egységelem: $(0, 0)$
- additív inverz: $-(a, b) = (-a, -b)$
- multiplikatív egységelem: $(1, 0)$
- multiplikatív inverz: $(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$, ha $(a, b) \neq (0, 0)$

A komplex számok teste

Tétel.

Az alábbi leképezés beágyazza a valós számok testét az $\left(\mathbb{R}^2; +, \cdot\right)$ testbe:

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ a \mapsto (a, 0)\,.$$

Definíció.

- Az $\left(\mathbb{R}^2; +, \cdot\right)$ test a komplex számok teste, amit ezentúl $\mathbb{C}$-vel jelölünk, elemeit (azaz a valós számpárokat) pedig komplex számoknak nevezzük.
- Tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ esetén az $(a, 0)$ komplex szám helyett egyszerűen a-t írunk, és nem is különböztetjük meg az a valós számtól. Így a valós számtest részteste lesz a komplex számtestnek.
- A $(0, 1)$ komplex számot i jelöli a továbbiakban (képzetes egység).

Állítás.

A képzetes egység négyzete: $i^2 = -1$.

Kanonikus alak

Tétel.

Minden komplex szám előáll, mégpedig egyértelmű módon, $x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ alakban. Az (a, b) komplex szám ilyen felírásánál $x = a$ és $y = b$, azaz

$$(a, b) = a + bi.$$

Definíció.

A $z = (a, b)$ komplex szám $a + bi$ alakban való felírását z kanonikus alakjának, az a valós számot z valós részének (jelölése: $\operatorname{Re} z$), a b valós számot z képzetes részének (jelölése: $\operatorname{Im} z$) nevezzük.

Megjegyzés.

Ezután a komplex számokat nem valós számokból álló számpárokként, hanem $a + bi$ alakú formális kifejezésekként kezeljük.
A szorzás és a reciprokképzés így fest kanonikus alakban:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)\, i;$$

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{1}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} i \quad (\text{ha } a + bi \neq 0).$$

Rendezés

Tétel.

A komplex számok teste nem elrendezhető, azaz nincs a $\mathbb{C}$ halmazon olyan lineáris rendezés, amellyel rendezett testet alkotna.

Bizonyítás.

$$i^2 = -1$$

$\square$

Konjugált, abszolút érték

Definíció.

A $z = a + bi$ komplex szám konjugáltján a $\overline{z} = a - bi$ komplex számot értjük, abszolút értéke pedig a $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ nemnegatív valós szám.

Tétel.

Bármely u, v komplex számokra érvényesek az alábbiak:

(1) $\overline{u+v} = \overline{u} + \overline{v}$;

(2) $\overline{u-v} = \overline{u} - \overline{v}$;

(3) $\overline{u \cdot v} = \overline{v} \cdot \overline{u}$;

(4) $\overline{1/v} = 1/\overline{v}$, ha $v \neq 0$;

(5) $\overline{\overline{u}} = u$;

(6) $\overline{u} = u \iff u \in \mathbb{R}$;

(7) $u + \overline{u} = 2\,\mathrm{Re}\,u$;

(8) $u \cdot \overline{u} = |u|^2$;

(9) $1/u = \overline{u}/|u|^2$ ha $u \neq 0$;

(10) $|\overline{u}| = |u|$;

(11) $|u \cdot v| = |u| \cdot |v|$;

(12) $|u/v| = |u| / |v|$ ha $v \neq 0$;

(13) $|u + v| \leq |u| + |v|$.

A komplex számsík

Definíció.

Legyen adott a síkban egy Descartes-féle derékszögű koordinátarendszer, és feleltessük meg az $a + bi$ komplex számnak az (a, b) koordinátájú pontot.
Így kapjuk a komplex számsíkot , más néven Gauss-féle számsíkot.

Az első tengelyt (abszcissza) valós tengelynek, a második tengelyt (ordináta) pedig képzetes tengelynek hívjuk. A valós tengelyen találhatók a valós számok, a képzetes tengelyen pedig az úgynevezett tiszta képzetes számok.

Megjegyzés.

A komplex számsíkon az abszolút érték az origótól (nullától) való távolságot jelenti, a konjugálás nem más, mint a valós tengelyre való tükrözés, az összeadás pedig (hely)vektorok összeadásával írható le geometriailag.

A komplex számtest polinomos konstrukciója

Tétel.

A komplex számok teste izomorf az $\mathbb{R}[x] / (x^2+1)$ maradékosztálytesttel. Az izomorfizmust az alábbi leképezés szolgáltatja:

$$\overline{a+bx} \mapsto a+bi.$$

Megjegyzés.

- Legyen T test, $m \in T[x]$ irreducibilis polinom. Ekkor $K = T[x] / (m)$ olyan test, amelyben az m polinomnak van gyöke, mégpedig $\alpha = \overline{x}$.
- A K test minden eleme egyértelműen felírható

  $$\overline{a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0} = a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0 \quad (a_{n-1}, \ldots, a_0 \in T)$$

  „kanonikus alakban''. Az α szimbólumról elég annyit tudni, hogy $m(\alpha) = 0$.
- Azt mondjuk, hogy a K test T-ből az m polinom egy α gyökének adjungálásával keletkezik: $K = T(\alpha)$.
- A komplex számtestet a valós számtestből az $m = x^2+1$ egy gyökének adjungálásával kapjuk: $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$.

A komplex számtest mátrixos konstrukciója

Tétel.

Az $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ alakú mátrixok egy résztestet alkotnak az $\mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixgyűrűben, és ez a résztest izomorf a komplex számok testével. Az izomorfizmust az alábbi leképezés szolgáltatja:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mapsto a + bi.$$

Megjegyzés.

- A fenti izomorfizmusnál egy komplex szám konjugáltjának a neki megfelelő mátrix transzponáltja felel meg, az abszolút értéknek pedig a determináns négyzetgyöke.
- Tudjuk, hogy az $e^{i\varphi} = \operatorname{cis}\varphi = \cos\varphi + i\sin\varphi$ komplex számmal való szorzás a komplex számsíkon az origó körüli φ szögű forgatást adja. Ezzel összhangban az $e^{i\varphi}$ komplex számhoz tartozó $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ mátrixnak megfelelő lineáris transzformáció szintén az origó körüli φ szögű forgatás.

Tartalom

Study-féle számok

Definíció.

A Study-féle számok (parabolikus komplex számok, duális számok) olyan $a + b\varepsilon$ alakú formális kifejezések, ahol a és b valós számok, ε pedig egy olyan szimbólum, amelyre $\varepsilon^2 = 0$. Az összeadást és a szorzást természetes módon értelmezzük:

$$
\begin{aligned}
(a + b\varepsilon) + (c + d\varepsilon) &= (a + c) + (b + d)\,\varepsilon, \\
(a + b\varepsilon) \cdot (c + d\varepsilon) &= ac + (ad + bc)\,\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Tétel.

A Study-féle számok kommutatív egységelemes gyűrűt alkotnak (van zérusosztó!).

Bizonyítás.

HF $\square$

Állítás.

- A hatványozás ilyen egyszerű: $(a + b\varepsilon)^n = a^n + na^{n-1}b\varepsilon$.
- Tetszőleges $f \in \mathbb{R}[x]$ polinomra $f(a + b\varepsilon) = f(a) + f'(a)\,b\varepsilon$.

A Study-féle számok polinomos és mátrixos konstrukciója

Tétel.

A Study-féle számok gyűrűje izomorf az $\mathbb{R}[x] \,/\, \left(x^2\right)$ maradékosztály-gyűrűvel. Az izomorfizmust az alábbi leképezés szolgáltatja:

$$\overline{a+bx} \mapsto a+b\varepsilon.$$

Bizonyítás.

HF $\square$

Tétel.

Az $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ alakú mátrixok egy részgyűrűt alkotnak az $\mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixgyűrűben, és ez a részgyűrű izomorf a Study-féle számok gyűrűjével. Az izomorfizmust az alábbi leképezés szolgáltatja:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mapsto a+b\varepsilon.$$

Bizonyítás.

HF $\square$

Hiperbolikus komplex számok

Definíció.

A hiperbolikus komplex számok (hasított komplex számok, kettős számok) olyan $a + bj$ alakú formális kifejezések, ahol a és b valós számok, j pedig egy olyan szimbólum, amelyre $j^2 = 1$. Az összeadást és a szorzást természetes módon értelmezzük:

$$(a + bj) + (c + dj) = (a + c) + (b + d)\, j,$$
$$(a + bj) \cdot (c + dj) = (ac + bd) + (ad + bc)\, j.$$

Tétel.

A hiperbolikus komplex számok kommutatív egységelemes gyűrűt alkotnak (van zérusosztó!).

Bizonyítás.

HF $\square$

A hiperbolikus komplex számok polinomos és mátrixos konstrukciója

Tétel.

A hiperbolikus komplex számok gyűrűje izomorf az $\mathbb{R}[x] / (x^2 - 1)$ maradékosztály-gyűrűvel. Az izomorfizmust az alábbi leképezés szolgáltatja:

$$\overline{a + bx} \mapsto a + bj.$$

Bizonyítás.

HF $\square$

Tétel.

Az $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ alakú mátrixok egy részgyűrűt alkotnak az $\mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixgyűrűben, és ez a részgyűrű izomorf a hiperbolikus komplex számok gyűrűjével. Az izomorfizmust az alábbi leképezés szolgáltatja:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mapsto a + bj.$$

Bizonyítás.

HF $\square$

Gondolkozivalók

- Hogyan lehetne definiálni a konjugálást a Study-féle, illetve a hiperbolikus számok körében?
- Rendelkezik-e a konjugált a komplex számoknál megszokott tulajdonságokkal?
- Értelmezzük az „abszolút értéket” a $|z| = \sqrt{|z\bar{z}|}$ képlettel. Milyen tulajdonságai vannak az abszolút értéknek? Hogy néz ki a síkon az

$$\left\{ z \colon\ |z|^2 = 1 \right\}$$

  halmaz (ami az egységkör megfelelője)?
- Mely számoknak van reciproka, és hogyan lehet azt kiszámolni? (Lehet a komplex számoknál megszokott módon a nevező konjugáltjával bővíteni a törtet?)
- Hány négyzetgyöke (n-edik gyöke) van egy számnak, és hogy lehet őket kiszámolni?

Algebrák

Definíció.

Egy T test feletti asszociatív algebrán olyan A nemüres halmazt értünk, melynek elemeit lehet egymással összeadni, szorozni, és T elemeivel szorozni:

$$+\colon A \times A \to A,\ (a,b) \mapsto a+b;$$
$$\bullet\colon A \times A \to A,\ (a,b) \mapsto a \bullet b;$$
$$\cdot\colon T \times A \to A,\ (\lambda,b) \mapsto \lambda \cdot a;$$

úgy, hogy

- $(A;+,\bullet)$ gyűrű;
- az összeadással és a T elemeivel való szorzásokkal A vektorteret alkot (A elemei a vektorok, T elemei a skalárok);
- minden $a, b \in A$ és $\lambda \in T$ esetén $\lambda \cdot (a \bullet b) = (\lambda \cdot a) \bullet b = a \bullet (\lambda \cdot b)$.

Algebrák

Részletesebben:

(1)	$\forall a, b, c \in A$:	$(a+b)+c = a+(b+c)$
(2)	$\forall a, b \in A$:	$a+b = b+a$
(3)	$\exists z \in A\ \forall a \in A$:	$a+z = a$
(4)	$\forall a \in A\ \exists b \in A$:	$a+b = z$
(5)	$\forall a, b, c \in A$:	$(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$
(6)	$\forall a, b, c \in A$:	$(a+b) \bullet c = a \bullet c + b \bullet c$
(7)	$\forall a, b, c \in A$:	$a \bullet (b+c) = a \bullet b + a \bullet c$
(8)	$\forall a, b \in A\ \forall \lambda \in T$:	$\lambda \cdot (a+b) = \lambda \cdot a + \lambda \cdot b$
(9)	$\forall a \in A\ \forall \lambda, \mu \in T$:	$(\lambda + \mu) \cdot a = \lambda \cdot a + \mu \cdot a$
(10)	$\forall a \in A\ \forall \lambda, \mu \in T$:	$(\lambda\mu) \cdot a = \lambda \cdot (\mu \cdot a)$
(11)	$\forall a \in A$:	$1 \cdot a = a$
(12)	$\forall a, b \in A\ \forall \lambda \in T$:	$\lambda \cdot (a \bullet b) = (\lambda \cdot a) \bullet b = a \bullet (\lambda \cdot b)$

Algebrák

Definíció.

- Ha a szorzás asszociativitása kivételével minden tulajdonság teljesül, akkor A-t nemasszociatív algebrának nevezzük.
- Ha a szorzás kommutatív, akkor A-t kommutatív algebrának nevezzük.
- Ha a szorzásra nézve is van egységelem, akkor A-t egységelemes algebrának nevezzük.
- Ha A-ban nincsenek zérusosztók (azaz minden $a, b \in A$ esetén $a \bullet b = z \implies a = z$ vagy $b = z$), akkor A-t zérososztómentes algebrának nevezzük.
- Mivel A vektortér T felett, beszélhetünk a dimenziójáról, és ezt a dimenziót az A algebra rangjának nevezzük.
- Ha A nemtriviális végesrangú egységelemes algebra $\mathbb{R}$ fölött, akkor hiperkomplex rendszernek, elemeit pedig hiperkomplex számoknak nevezzük.
- Ha A-nak csak egy eleme van, akkor triviális algebrának nevezzük.

Példák

- Minden test 1 rangú asszociatív, kommutatív, egységelemes, zérusosztómentes algebra saját maga fölött.
- A komplex számok 2 rangú asszociatív, kommutatív, egységelemes, zérusosztómentes algebrát alkotnak a valós számtest fölött.
- A Study-féle számok és a hiperbolikus komplex számok 2 rangú asszociatív, kommutatív, egységelemes algebrát alkotnak a valós számtest fölött.
- Az $n \times n$-es valós mátrixok $n \geq 2$ esetén n^2 rangú asszociatív, egységelemes algebrát alkotnak a valós számtest fölött.
- A T feletti polinomok végtelen rangú asszociatív, kommutatív, egységelemes, zérusosztómentes algebrát alkotnak T fölött.
- A folytonos valós függvények végtelen rangú asszociatív, kommutatív, egységelemes algebrát alkotnak $\mathbb{R}$ fölött.
- A differenciálható valós függvények végtelen rangú asszociatív, kommutatív, egységelemes algebrát alkotnak $\mathbb{R}$ fölött.

Az alaptest beágyazása

Tétel.

Ha A nemtriviális egységelemes algebra T felett, akkor A tartalmaz T-vel (mint saját maga feletti 1 rangú algebrával) izomorf részalgebrát.

Bizonyítás.

Jelölje z az A algebra additív egységelemét, e pedig a multiplikatív egységelemet. Mivel A nemtriviális, $e \neq z$. A következő leképezés beágyazza T-t A-ba:

$$\varphi\colon\ T \to A,\ \lambda \mapsto \lambda \cdot e.$$

- injektivitás:

$$\varphi(\lambda) = \varphi(\mu) \iff \lambda \cdot e = \mu \cdot e \iff (\lambda - \mu) \cdot e = z \iff \lambda - \mu = 0 \iff \lambda = \mu$$

- felcserélhetőség a $+$ művelettel:

$$\varphi(\lambda) + \varphi(\mu) = \lambda \cdot e + \mu \cdot e = (\lambda + \mu) \cdot e = \varphi(\lambda + \mu)$$

- felcserélhetőség a $\bullet$ művelettel:

$$\varphi(\lambda) \bullet \varphi(\mu) = (\lambda \cdot e) \bullet (\mu \cdot e) = (\lambda\mu) \cdot (e \bullet e) = (\lambda\mu) \cdot e = \varphi(\lambda\mu)$$

- felcserélhetőség a $\cdot$ „művelettel”:

$$\lambda \cdot \varphi(\mu) = \lambda \cdot (\mu \cdot e) = (\lambda\mu) \cdot e = \varphi(\lambda\mu)$$

Az alaptest beágyazása

Megjegyzés.

Ha az algebra szorzása nem is kommutatív, a $\lambda \cdot e$ alakú elemek akkor is minden elemmel felcserélhetőek:

$$(\lambda \cdot e) \bullet a = \lambda \cdot (e \bullet a) = \lambda \cdot a = \lambda \cdot (a \bullet e) = a \bullet (\lambda \cdot e) \, .$$

Ez azt jelenti, hogy $\varphi(T) \subseteq \mathcal{C}(A)$, ahol $\mathcal{C}(A)$ jelöli az A algebra centrumát:

$$\mathcal{C}(A) = \{c \in A : c \bullet a = a \bullet c \text{ minden } a \in A \text{ esetén}\} \, .$$

Megjegyzés.

Ezentúl csak egységelemes algebrákkal foglalkozunk és az alaptest elemeit azonosítjuk az előző tételbeli beágyazás melletti képükkel. Tehát úgy tekintjük, hogy $\lambda \cdot e = \lambda$, így például $e = 1 \cdot e = 1$ és $z = 0 \cdot e = 0$. Így az alaptest részalgebrája lesz A-nak: $T \subseteq A$.
További egyszerűsítésként $a \bullet b$ helyett csak $a \cdot b$-t vagy ab-t írunk.

2 rangú hiperkomplex rendszerek

Tétel.

Minden 2 rangú hiperkomplex rendszer izomorf a komplex számok, a Study-féle számok vagy a hiperbolikus komplex számok algebrájával.

Bizonyítás.

Legyan A egy 2 rangú hiperkomplex rendszer. Ekkor A kétdimenziós vektortér $\mathbb{R}$ fölött; tehát bármely két lineárisan független vektora bázist alkot; például $1, a$ bázis, ha $a \notin \mathbb{R}$. Ekkor A bármely eleme egyértelműen felírható $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot a \ \ (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$ alakban. Speciálisan a^2 is ilyen alakba írható: $a^2 = \lambda + \mu a$. Célunk olyan $1, c \ \ (c \notin \mathbb{R})$ bázist találni, amelyre $c^2 \in \{-1, 0, 1\}$. A $b := a - \frac{\mu}{2} \in \mathbb{R}$ elemre $b^2 = \lambda + \frac{\mu^2}{4} = \beta \in \mathbb{R}$, tehát az $1, b$ bázis már „majdnem" jó.

(a) Ha $\beta = 0$, akkor nincs semmi teendőnk ($c := b$), rögtön látszik, hogy A izomorf a Study-féle számok algebrájával.

(b) Ha $\beta > 0$, akkor legyen $c = \frac{b}{\sqrt{\beta}}$. Ekkor $c^2 = 1$, tehát A izomorf a hiperbolikus komplex számok algebrájával.

(c) Ha $\beta < 0$, akkor legyen $c = \frac{b}{\sqrt{|\beta|}}$. Ekkor $c^2 = -1$, tehát A izomorf a komplex számok algebrájával. $\square$

Tartalom

Kvaterniók

Definíció.

A kvaterniók olyan $a + bi + cj + dk$ alakú formális kifejezések, ahol a, b, c, d valós számok, i, j, k pedig egy olyan szimbólum, amelyekre teljesülnek az alábbiak:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \qquad ij = k = -ji,\ jk = i = -kj,\ ki = j = -ik.$$

A kvaterniók halmazát $\mathbb{H}$-val jelöljük.

A kvaterniók ferdeteste

Definíció.

A $q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$ és $q_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$ kvaterniók összegét és szorzatát természetes módon definiáljuk:

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i + (c_1 + c_2)\, j + (d_1 + d_2)\, k, \\ q_1 \cdot q_2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2) i \\ &\quad + (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2) j + (a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2) k. \end{aligned}$$

Tétel.

A fent definiált műveletekkel a kvaterniók ferdetestet alkotnak ($\mathbb{H}$ mindent tud, amit egy testnek tudnia kell, kivéve a szorzás kommutativitását). Egyúttal $\mathbb{H}$ négydimenziós vektortér is a valós számtest fölött. Következésképp a kvaterniók egy 4 rangú asszociatív, egységelemes, zérusosztómentes algebrát alkotnak $\mathbb{R}$ fölött.

Kvaterniócsoport

Megjegyzés.

A $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ halmaz csoportot alkot a szorzással. Ezt a csoportot kvaterniócsoportnak nevezzük.

$\cdot$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Valós rész, képzetes rész, konjugált, abszolút érték

Definíció.

A $q = a + bi + cj + dk$ kvaternió valós és képzetes része, konjugáltja és abszolút értéke:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(q) &= a, \\ \operatorname{Im}(q) &= bi + cj + dk, \\ \overline{q} &= \operatorname{Re}(q) - \operatorname{Im}(q) = a - bi - cj - dk, \\ |q| &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}. \end{aligned}$$

Tétel.

A kvaterniók konjugáltja és abszolút értéke rendelkezik a komplex számoknál tanult 13 tulajdonsággal. Speciálisan $q \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ esetén $q\overline{q} = \overline{q}q = |q|^2 \in \mathbb{R}^+$, így minden nemnulla kvaterniónak van multiplikatív inverze:

$$\frac{1}{q} = \frac{\overline{q}}{q\overline{q}} = \frac{\overline{q}}{|q|^2}.$$

A kvaterniók mátrixos konstrukciója

Tétel.

A kvaterniók algebrája izomorf az $\mathbb{R}^{4\times 4}$ mátrixalgebra egy részalgebrájával az alábbi izomorfizmus mellett:

$$a + bi + cj + dk \mapsto \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

Bizonyítás.

HF $\square$

Érdekességek

Megjegyzés.

A $|q_1|^2 \cdot |q_2|^2 = |q_1 q_2|^2$ azonosságból következik, hogy ha m és n előáll négy négyzetszám összegeként akkor mn is előáll így:

$$
\begin{aligned}
m = |q_1|^2 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2,\ & n = |q_2|^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2 \\
\Downarrow & \\
m \cdot n = |q_1|^2 \cdot |q_2|^2 &= |q_1 q_2|^2 \\
&= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2)^2 + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)^2 \\
&\quad + (a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)^2 + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)^2.
\end{aligned}
$$

Ezt az azonosságot már Euler is tudta, és ezt használva Lagrange bebizonyította, hogy minden természetes szám előáll négy négyzetszám összegeként. Erre a tételre az „egész kvaterniók” gyűrűjének irreducibilis elemeit vizsgálva is lehet bizonyítást adni.

Érdekességek

Megjegyzés.

Ha az i, j, k kvaterniókat három egymásra merőleges háromdimenziós egységvektornak tekintjük (úgy, hogy ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkossanak), akkor a $q = a + bi + cj + dk$ valós része és képzetes része egy skalár, illetve egy vektor:

$$\mathrm{Re}\,(q) = a =: \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{Im}\,(q) = bi + cj + dk =: \vec{v} \in \mathbb{R}^3.$$

Tehát minden kvaternió felfogható egy skalár és egy vektor összegeként. Ebben az alakban egyszerűbben felírható a szorzás képlete:

$$(\lambda + \vec{v}) \cdot (\mu + \vec{w}) = (\lambda\mu - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle) + (\lambda\vec{w} + \mu\vec{v} + \vec{v} \times \vec{w})\,.$$

Tartalom

Frobenius tétele

Tétel.

Izomorfia erejéig csak három nemtriviális, végesrangú, zérusosztómentes, asszociatív algebra létezik a valós számok teste fölött:

- a valós számok teste (1 rangú algebra);
- a komplex számok teste (2 rangú algebra);
- a kvaterniók ferdeteste (4 rangú algebra).

Mégis van tovább!

Legyen A a valós vagy a komplex számok algebrája, és legyen A' az $a + bE$ alakú formális kifejezések halmaza, ahol $a, b \in A$ és E egy szimbólum. Az összeadást és a szorzást a következőképpen értelmezzük:

$$(a + bE) + (c + dE) = (a + c) + (b + d)\,E,$$
$$(a + bE) \cdot (c + dE) = \left(ac - \overline{d}b\right) + (da + b\overline{c})\,E.$$

Az így kapott A' algebrát az A algebra megkettőzöttjének nevezzük (Cayley-Dickson konstrukció). Ha $A = \mathbb{R}$, akkor $A' \cong \mathbb{C}$, és ha $A = \mathbb{C}$, akkor $A' \cong \mathbb{H}$.

A kvaterniók algebrájának megkettőzöttje a Cayley-féle számok (oktoniók) algebrája, amely 8 rangú nemasszociatív, egységelemes, zérusosztómentes algebra $\mathbb{R}$ fölött. Itt az asszociativitás alábbi gyengébb formája (alternativitás) teljesül:

$$a \cdot (a \cdot b) = (a \cdot a) \cdot b, \qquad a \cdot (b \cdot b) = (a \cdot b) \cdot b, \qquad a \cdot (b \cdot a) = (a \cdot b) \cdot a.$$

Ha ismét alkalmazzuk a Cayley-Dickson konstrukciót, akkor egy 16 rangú egységelemes algebrát kapunk (szedeniók), amely már nem is alternatív, minden nemnulla elemének van inverze, de mégis vannak benne zérusosztók!

Általános Frobenius-tétel

Tétel.
Izomorfia erejéig csak négy nemtriviális, végesrangú, zérusosztómentes, alternatív algebra létezik a valós számok teste fölött:

- a valós számok teste (1 rangú algebra);
- a komplex számok teste (2 rangú algebra);
- a kvaterniók ferdeteste (4 rangú algebra);
- a Cayley-féle számok alternatív algebrája (8 rangú algebra).

Kompozícióalgebrák

Legyen A egy $\mathbb{R}$ fölötti algebra, és legyen $\langle , \rangle : A^2 \to \mathbb{R}$ egy szimmetrikus bilineáris alak:

$$\begin{aligned} \forall a, b \in A: \quad & \langle a, b\rangle = \langle b, a\rangle ; \\ \forall a, b, c \in A: \quad & \langle a + b, c\rangle = \langle a, c\rangle + \langle b, c\rangle ; \\ \forall a, b \in A \ \forall \lambda \in \mathbb{R}: \quad & \langle \lambda a, b\rangle = \lambda \langle a, b\rangle . \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy az $N(a) = \langle a, a\rangle$ kvadratikus alak pozitív definit:

$$\forall a \in A: \ \langle a, a\rangle \geq 0 \quad \text{és} \quad \langle a, a\rangle = 0 \iff a = 0.$$

Az $N(a)$ nemnegatív valós számot az a elem normájának nevezzük. A norma multiplikatív, ha

$$\forall a, b \in A: \ N(ab) = N(a) N(b) .$$

Ha a fentiek mind teljesülnek, akkor A-t kompozícióalgebrának nevezzük.

Hurwitz tétele

Tétel.

Izomorfia erejéig csak négy nemtriviális, végesrangú, egységelemes kompozícióalgebra létezik a valós számok teste fölött:

- a valós számok teste (1 rangú algebra);
- a komplex számok teste (2 rangú algebra);
- a kvaterniók ferdeteste (4 rangú algebra)
- a Cayley-féle számok alternatív algebrája (8 rangú algebra).

Következmény.

Csak $n = 1, 2, 4, 8$ esetén létezik

$$\left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right) \cdot \left(y_1^2 + \cdots + y_n^2\right) = z_1^2 + \cdots + z_n^2$$

alakú azonosság, ahol mindegyik z_i egy $\sum c_{ij} x_i y_j$ alakú kifejezés.