Algebrai és transzcendens számok

Algebrai számok

Definíció.

Az α komplex számot **algebrai számnak** nevezzük, ha gyöke valamely nemzéró racionális/egész együtthatós polinomnak. A nem algebrai számokat **transzcendens számoknak** nevezzük.

Tétel.

Az algebrai számok résztestet alkotnak a komplex számok testében.

Tétel.

Ha α algebrai szám és $n \geq 2$, akkor $\sqrt[n]{\alpha}$ is algebrai szám (a gyöknek mind az n értékére).

Definíció.

Az α komplex számot **gyökmennyiségnek** nevezzük, ha megkapható racionális számokból kiindulva a négy alapművelet (összeadás, kivonás, szorzás, osztás) és egész kitevős gyökvonás véges számú alkalmazásával.

Következmény.

A gyökmennyiségek algebrai számok.

Algebrai számok

Példa.

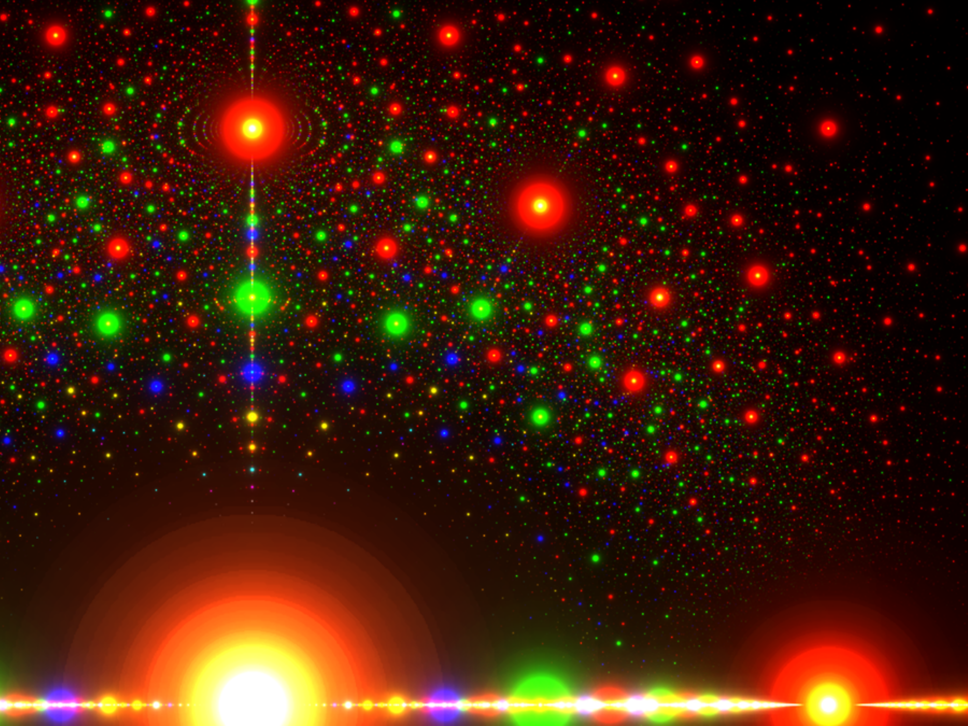
Ez a szám algebrai:

$$\frac{\sqrt[3]{3-\sqrt{\sqrt[4]{2}+\sqrt[5]{\frac{3}{17}}}}+\sqrt[17]{323-\sqrt{2014}}}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[5]{5}}$$

Tétel.

Van olyan algebrai szám, ami nem gyökmennyiség.

A fenti ártatlannak látszó tétel azt mutatja, hogy nem minden egyenlet oldható meg gyökjelek segítségével. Az ötödfokú egyenletnek már nincs általános megoldóképlete, sőt, például az $x^5 - 4x + 2 = 0$ egyenletnek még „ad hoc" megoldóképlete sincs, mert gyökei nem gyökmennyiségek.



Transzcendens számok

Tétel (Cantor (1874)).

Létezik transzcendens szám.

Bizonyítás.

Az algebrai számok halmazának számossága ($\aleph_0$), kisebb, mint a komplex számok halmazának számossága ($\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$), így a komplex számok „túlnyomó többsége” transzcendens. $\square$

Példa.

- Liouville (1844, 1851): $\sum \frac{1}{10^{n!}}$ transzcendens szám.
- Hermite (1873): e transzcendens szám.
- Lindemann (1882): Ha $\alpha \neq 0$ algebrai szám, akkor e^{α} transzcendens szám. Következésképp π transzcendens.
- Gelfond, Schneider (1934): Ha $\alpha \neq 0, 1$ és $\beta \notin \mathbb{Q}$ algebrai számok, akkor α^{β} transzcendens szám.

  Például $2^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ és $i^i = e^{-\pi/2}$, $(-1)^i = e^{\pi}$ transzcendens számok.
- Nem tudjuk, hogy $\pi + e$, $\pi - e$, $\pi \cdot e$, π / e transzcendensek-e.

Diofantoszi approximáció

A transzcendencia-bizonyítások fontos eszköze az a tény, hogy algebrai számokat nem lehet nagyon jól közelíteni racionális számokkal. Ez a *diofantoszi approximáció* témaköre: adott α valós számhoz szeretnénk olyan $\frac{p}{q}$ közelítő törtet találni ($p, q \in \mathbb{Z}, q > 0, p \perp q$), amelyre $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$ kicsi, és q nem túl nagy.

Tétel (Dirichlet approximációs tétele (1842)).

Minden α valós szám és minden N természetes szám esetén van α-nak olyan $\frac{p}{q}$ közelítése, amelyre

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{Nq} \quad \textit{és} \quad q \leq N.$$

Következmény.

Ha $\alpha \notin \mathbb{Q}$, akkor végtelen sok olyan $\frac{p}{q}$ közelítése van, amelyre $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$.

Tétel.

Ha $\alpha \in \mathbb{Q}$, akkor csak véges sok olyan $\frac{p}{q}$ közelítése van, amelyre $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$.

Diofantoszi approximáció

Tétel (Hurwitz (1891)).

Ha α irracionális szám, akkor végtelen sok olyan $\frac{p}{q}$ közelítése van, amelyre

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}.$$

Ha $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, akkor az állítás nem javítható: nem írhatunk a nevezőbe semmilyen $\sqrt{5}$-nél nagyobb számot.

Tétel (Liouville (1844), Thue (1909), Siegel (1921), Roth (1955)).

Ha α irracionális algebrai szám és $\varepsilon > 0$, akkor csak véges sok olyan $\frac{p}{q}$ közelítése van, amelyre

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}.$$