A valós számokon túl

Tartalom

Tartalom

Korlátok

Tetszőleges T rendezett testben definiálhatunk intervallumokat:

- $(a, b) := \{x \in T : a < x < b\}$;
- $[a, b] := \{x \in T : a \leq x \leq b\}$;
- $[a, b) := \{x \in T : a \leq x < b\}$;
- $(a, \infty) := \{x \in T : a < x\}$.

A $H \subseteq T$ halmaz alulról korlátos, ha létezik olyan $a \in T$ elem (alsó korlát), amelyre minden $h \in H$ esetén $a \leq h$ teljesül. Ha az alsó korlátok között van legnagyobb, akkor azt H infimumának nevezzük:

$$\inf H = \max\{a \in T : \forall h \in H : \; a \leq h\}.$$

Hasonlóan értelmezhető egy felülről korlátos $H \subseteq T$ halmaz szuprémuma, vagyis legkisebb felső korlátja:

$$\sup H = \min\{a \in T : \forall h \in H : \; a \geq h\}.$$

A racionális számtest beágyazása

Legyen T egy rendezett test, e multiplikatív egységelemmel, P pozitivitási tartománnyal, és legyen

$$T^+ = \{a \in T \colon a > 0\} = P \setminus \{0\}, \qquad T^- = \{a \in T \colon a < 0\}\,.$$

Emlékeztető:

- $\forall a_1, \ldots, a_n \in T:\ a_1^2 + \cdots + a_n^2 \in P$;
- $\forall a_1, \ldots, a_n \in T:\ a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 0 \iff a_1 = \cdots = a_n = 0.$

Ebből következik, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

- $n \cdot e = \underbrace{e + \cdots + e}_{n} = \underbrace{e^2 + \cdots + e^2}_{n} \in T^+$;
- $(-n) \cdot e = -(n \cdot e) \in T^-$.

Ezek alapján könnyen látható, hogy a $\varphi \colon \mathbb{Z} \to T$, $n \mapsto n \cdot e$ leképezés beágyazza az egész számok gyűrűjét T-be, sőt, ezt kiterjesztve a

$$\varphi \colon \mathbb{Q} \to T,\ \frac{a}{b} \mapsto ae \cdot (be)^{-1}$$

leképezéssel beágyazhatjuk a racionális számok testét is T-be ($\operatorname{char} T = 0$).

Nagyságrendi viszonyok

Azonosítsuk az $ae \cdot (be)^{-1} \in T$ elemet az $\frac{a}{b}$ racionális számmal (pl. $e = 1$).
Így ezentúl mindig feltehetjük, hogy $\mathbb{Q}$ részteste T-nek.

A φ leképezés nem csak a műveletekkel cserélhető fel, de monoton is, azaz T rendezett résztestként tartalmazza $\mathbb{Q}$-t (vagyis $\mathbb{Q}$ szokásos rendezése egybeesik T rendezésének $\mathbb{Q}$-ra való megszorításával).

Definíció.

Értelmezzük a T^+ halmazon a „végtelenül kisebb" relációt a következőképpen:

$$\begin{aligned} a \ll b &\iff \forall n \in \mathbb{N} : na < b \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N} : n < \tfrac{b}{a} \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N} : \tfrac{a}{b} < \tfrac{1}{n}. \end{aligned}$$

A fentiekből világos, hogy

$$a \ll b \iff 1 \ll \frac{b}{a} \iff \frac{a}{b} \ll 1.$$

Végtelenül kicsi és végtelenül nagy elemek

Definíció.

A T^+ halmaz elemeit három csoportba sorolhatjuk az 1-hez való viszonyuk szerint:

- $I^+ := \{a \in T^+ : a \ll 1\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0\,,\ \frac{1}{n}\right)$ (infinitezimális elemek)
- $V^+ := \{a \in T^+ : a \gg 1\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \left(m\,,\ \infty\right)$ (végtelen elemek)
- $F^+ := T^+ \setminus (I^+ \cup V^+) = \bigcup_{n,m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}\,,\ m\right]$ (véges elemek)

Az összeg és szorzat nagyságrendje így alakul (HF):

$+$	I^+	F^+	V^+
I^+	I^+	F^+	V^+
F^+	F^+	F^+	V^+
V^+	V^+	V^+	V^+

$\cdot$	I^+	F^+	V^+
I^+	I^+	I^+	?
F^+	I^+	F^+	V^+
V^+	?	V^+	V^+

Az arkhimédeszi axióma

Definíció.

A T rendezett test arkhimédeszi test, ha teljesülnek rá az alábbi ekvivalens feltételek:

- $\forall a \in T \ \exists n \in \mathbb{N}: \ n > a$;
- $V^+ = \emptyset$;
- $I^+ = \emptyset$;
- $\ll = \emptyset$.

Tétel.

Minden rendezett T testre ekvivalensek a következők:

1. T arkhimédeszi test;
2. $\mathbb{Q}$ sűrű részhalmaz T-ben: $\forall a, b \in T: \ a < b \implies \exists r \in \mathbb{Q}: \ a < r < b$;
3. $\forall a \in T: \ a = \inf \{r \in \mathbb{Q} : r > a\}$;
4. $\forall a \in T: \ a = \sup \{r \in \mathbb{Q} : r < a\}$.

Példa nem arkhimédeszi testre

Bővítsük a valós számok testét egy ε infinitezimális elemmel. Az $\mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ halmaz persze nem lesz test; hozzá kell vennünk minden olyan kifejezést, amit a négy alapművelet (összeadás, kivonás, szorzás, osztás) véges számú alkalmazásával fel tudunk építeni ε-ból és valós számokból. Ezek mind így festenek:

$$\frac{a_n\varepsilon^n + \cdots + a_1\varepsilon + a_0}{b_m\varepsilon^m + \cdots + b_1\varepsilon + b_0} \qquad \left(n, m \in \mathbb{N}_0,\ a_i, b_j \in \mathbb{R},\ b_m \neq 0\right).$$

Az ilyen alakú elemek már testet alkotnak; jelöljük ezt $\mathbb{R}(\varepsilon)$-nal.

Az a tény, hogy $0 < \varepsilon < \frac{1}{n}$ minden $n \in \mathbb{N}$-re, egyértelműen meghatározza a rendezést az $\mathbb{R}(\varepsilon)$ testen. Például (HF):

$$5 + 100\varepsilon^2 \ < \ 6 - 37\varepsilon \ \ll \ \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon^2 + 2\varepsilon} \ \ll \ \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Node létezik-e egyáltalán ε?

Nem kell hinni epszilonban

Tekintsük az $\mathbb{R}$ feletti racionális törtek testét (ez nem más, mint az $\mathbb{R}[x]$ gyűrű hányadosteste):

$$\mathbb{R}(x) = \left\{ \frac{f}{g} \ : \ f, g \in \mathbb{R}[x], \ g \neq 0 \right\}.$$

Legyen P azon $t = \frac{f}{g}$ racionális törtek halmaza, amelyeknél f és g legkisebb fokú tagja azonos előjelű (vagy pedig $f = 0$). Másképpen:

$$t \in P \iff \exists \delta \in \mathbb{R}^{+} \forall a \in (0, \delta) : \ t(x) \geq 0.$$

Könnyen meggondolható (HF), hogy P teljesíti a pozitivitási tartományok tulajdonságait, tehát $\mathbb{R}(x)$ lineárisan rendezett test: $t_1 \geq t_2 \iff t_1 - t_2 \in P$. Az $x \in \mathbb{R}(x)$ elem infinitezimális:

$$0 < x < \frac{1}{n} \iff x - 0 = \frac{x}{1} \in P \text{ és } \frac{1}{n} - x = \frac{1 - nx}{n} \in P. \checkmark$$

Tehát csak át kell nevezni x-et ε-ra, és máris megkapjuk az előző példában szereplő testet.

Tartalom

Dedekind-teljesség

Definíció.

A T rendezett test Dedekind-teljes, ha teljesülnek rá az alábbi ekvivalens feltételek:

- minden nem üres alulról korlátos $H \subseteq T$ halmaznak van infimuma;
- minden nem üres felülről korlátos $H \subseteq T$ halmaznak van szuprémuma;
- ha $T = A \dot\cup F$ úgy, hogy A minden eleme kisebb F minden eleménél, akkor vagy A-nak van legnagyobb eleme vagy F-nek van legkisebb eleme.

Tétel.

Minden Dedekind-teljes rendezett test arkhimédeszi.

Bizonyítás.

Ha T nem arkhimédeszi, akkor $\mathbb{N} \subseteq T$ felülről korlátos. Ha T Dedekind-teljes, akkor létezik $\sup \mathbb{N} =: a$. Node

$$\forall n \in \mathbb{N} : a \geq n \implies \forall n \in \mathbb{N} : a \geq n + 1 \implies \forall n \in \mathbb{N} : a - 1 \geq n.$$

Ez azt jelenti, hogy $a - 1$ is felső korlátja $\mathbb{N}$-nek, ami ellentmondás (miért?). $\square$

A valós számok teljessége

Tétel.

A valós számok teste Dedekind-teljes.

Bizonyítás.

A valós számok Dedekind-féle konstrukcióját használjuk. Legyen $H \subseteq \mathcal{R}$ nem üres alulról korlátos halmaz; be kell látnunk, hogy létezik H-nak infimuma. Mivel a valós számok rendezése éppen a Dedekind szeletek *fordított irányú* tartalmazása, ha az $(\mathcal{R}; \leq)$ rendezett halmazról áttérünk a $(\mathcal{R}; \subseteq)$ rendezett halmazra, akkor minden a feje tetejére áll: H felülről korlátos, és a szuprémumát keressük.

Legyen $Z \in \mathcal{R}$ egy felső korlátja H-nak, azaz Z olyan Dedekind-szelet, ami tartalmazza H minden elemét. Legyen $X \subseteq \mathbb{Q}$ az összes H-beli elem uniója.

Ekkor $X \subseteq Z \subset \mathbb{Q}$ (VRH). Belátható, hogy a (FSZ) és (NLK) tulajdonságok öröklődnek az egyesítésre, tehát X Dedekind-szelet. Világos, hogy X a legszűkebb olyan halmaz, ami tartalmazza H minden elemét, tehát X lesz H szuprémuma a $\subseteq$ rendezésre nézve, és így X lesz H infimuma a $\leq$ rendezésre nézve. $\square$

Következmény.

A valós számok teste arkhimédeszi.

Csak egy maradhat

Tétel.

Ha T Dedekind-teljes rendezett test, akkor $T \cong \mathcal{R}$.

Bizonyítás.

Legyen T Dedekind-teljes (és így arkimédeszi) rendezett test; a szokott módon feltehetjük, hogy $\mathbb{Q} \subseteq T$. Tetszőleges $a \in T$ esetén legyen Ü_a az a-nál nagyobb racionális számok halmaza:

$$\text{Ü}_a = \{r \in \mathbb{Q} \colon r > a\}.$$

Mivel T arkhimédeszi, Ü_a Dedekind-szelet:

$\text{Ü}_a \neq \emptyset$: $a \notin V^+ \implies \text{Ü}_a \neq \emptyset$;

(VRH): $a \notin V^- \implies \text{Ü}_a \neq \mathbb{Q}$;

(FSZ): triviális;

(NLK): $a = \inf \text{Ü}_a$ miatt a legkisebb elem csak a lehetne, de $a \notin \text{Ü}_a$.

Csak egy maradhat

Bizonyítás. (folyt.)

Tehát kaptunk egy $\text{Ü}: T \to \mathcal{R}$, $a \mapsto \text{Ü}_a$ leképezést. Ez a leképezés injektív:

$$\begin{aligned} a < b &\implies \exists r \in \mathbb{Q}:\ a < r < b \\ &\implies \exists r \in \mathbb{Q}:\ r \in \text{Ü}_a \setminus \text{Ü}_b \implies \text{Ü}_a \neq \text{Ü}_b \qquad (\text{sőt } \text{Ü}_a \supset \ddot{U}_b). \end{aligned}$$

Meg lehet mutatni, hogy Ü felcserélhető az összeadással és a szorzással:

$$\text{Ü}_{a+b} = \text{Ü}_a + \text{Ü}_b \quad \text{és} \quad \text{Ü}_{a \cdot b} = \text{Ü}_a \cdot \text{Ü}_b \text{ minden } a, b \in T \text{ esetén.}$$

Ezzel beláttuk, hogy Ü (monoton) beágyazás.

Be kell még látni, hogy Ü szürjektív. Tetszőleges $X \in \mathcal{R}$ Dedekind-szeletet tekinthetünk T részhalmazának (hiszen $X \subseteq \mathbb{Q} \subseteq T$). Mivel T Dedekind-teljes, létezik $a := \inf X \in T$. Világos, hogy ekkor $\text{Ü}_a = X$. □

Következmény.

Ha T arkhimédeszi rendezett test, akkor T izomorf a valós számok egy résztestével. Fordítva, $\mathbb{R}$ minden résztteste arkhimédeszi.

Cauchy-teljesség

Definíció.

Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq T$ sorozat konvergens, ha

$$\exists a \in T \ \forall \delta \in T^+ \ \exists \nu \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}: \ n \geq \nu \implies |a_n - a| < \delta.$$

Definíció.

Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq T$ sorozat Cauchy-sorozat, ha

$$\forall \delta \in T^+ \ \exists \nu \in \mathbb{N} \ \forall n, m \in \mathbb{N}: \ n, m \geq \nu \implies |a_n - a_m| < \delta.$$

Könnyen látható, hogy minden Cauchy-sorozat konvergens, de fordítva ez nem mindig igaz.

Definíció.

A T rendezett test Cauchy-teljes, ha minden $\{a_n\} \subseteq T$ Cauchy-sorozat konvergens.

Teljességi axiómák (nem) teljes listája

Tétel.

Tetszőleges T arkhimédeszi rendezett test esetén ekvivalensek az alábbiak:

(1) T Dedekind-teljes;

(2) T-ben minden monoton korlátos sorozat konvergens;

(3) $T \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$;

(4) T-ben minden korlátos sorozatnak van torlódási pontja;

(5) T Cauchy-teljes.

Megjegyzés.

A tétel egy része igaz marad akkor is, ha nem tesszük fel, hogy T arkhimédeszi. Például $(1) \implies (5)$ igaz marad, mert (1)-ből úgyis következik az arkhimédeszi tulajdonság. De például $(5) \implies (1)$ általában nem igaz (majd később látunk ellenpéldát).

Tartalom

Tizedes tört

Tizedes törtön egy

$$\overline{c_{-n}\cdots c_{-1}c_0,c_1c_2\cdots} = c_{-n}\cdot 10^n + \cdots c_{-1}\cdot 10 + c_0 + c_1\cdot\frac{1}{10} + c_2\cdot\frac{1}{10^2} + \cdots$$
$$= \sum_{k=-n}^{\infty} c_k \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^k$$

alakú összeget értünk, ahol $c_k \in \{0,1,\dots 9\}$ minden $k \geq -n$ esetén.
Ha a c_k számjegyek valahonnan kezdve végig nullák, akkor a tizedes tört véges, egyébként pedig végtelen.

Jelölje s_N az N-edik részletösszeget:

$$s_N = \sum_{k=-n}^{N} c_k \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^k.$$

A tizedes tört értékét a részletösszegek sorozatának $\lim_{N\to\infty} s_N$ határértékeként értelmezzük.

Ha van olyan p, hogy $d_{k+p} = d_k$ minden elég nagy k-ra, akkor azt mondjuk, hogy a tizedes tört periodikus (szakaszos).

Minden tizedes tört valós szám

Tétel.

A részletösszegek sorozata konvergens minden tizedes törtnél.

Bizonyítás.

AÁMNTFH $c_{-n} = \cdots = c_{-1} = c_0 = 0$. Világos, hogy s_N monoton növekvő sorozat, ezért elég belátni, hogy felülről korlátos (hiszen $\mathbb{R}$ teljes):

$$s_N \leq \sum_{k=1}^{N} 9 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{9}{10} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^N}{1 - \frac{1}{10}} = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^N \leq 1.$$

□

Megjegyzés.

A valós számok testében $\frac{1}{10^N} \to 0$, és így $0,999\cdots = 1$. Egy nem arkhimédeszi testben viszont ez nincs így! Tehát nem teljesen ördögtől való az a „megérzés", hogy $0,999\cdots < 1$ (csak épp a valós számtestben nem igaz).

Minden valós szám tizedes tört

Tétel.

Minden z valós számhoz vannak olyan c_k számjegyek, hogy az azokból felépített tizedes törtre $\lim_{N\to\infty} s_N = z$.

Bizonyítás.

AÁMNTFH $0 \le z < 1$. Van (egyetlen) olyan $c_1 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ számjegy, amelyre $z \in \left[\frac{c_1}{10}, \frac{c_1}{10} + \frac{1}{10}\right)$. Hasonló módon folytatva a „tizedelést”, kapjuk számjegyeknek egy $c_1, c_2, \ldots$ sorozatát, és z-t tartalmazó egymásba skatulyázott intervallumoknak egy $[a_1, b_1) \supseteq [a_2, b_2) \supseteq \cdots$ sorozatát, ahol

$$a_n = \overline{0, c_1 c_2 \cdots c_n} \quad \text{és} \quad b_n = a_n + \frac{1}{10^n}.$$

Az a_n sorozat éppen a $\overline{0, c_1 c_2 \cdots}$ tizedes tört részletösszegeinak sorozata, ezért $\lim_{n\to\infty} a_n = \overline{0, c_1 c_2 \cdots}$. Másrészt

$$a_n \le z < a_n + \frac{1}{10^n}$$

miatt $z = \lim_{n\to\infty} a_n = \overline{0, c_1 c_2 \cdots}$. $\square$

Minden periodikus tizedes tört racionális szám

Tétel.

Minden periodikus tizedes tört racionális szám.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}
z &= \overline{a_1 \cdots a_k, b_1 \cdots b_m\, c_1 c_2 \cdots c_n\, c_1 c_2 \cdots c_n\, c_1 c_2 \cdots c_n \cdots} \\
10^m \cdot z &= \overline{a_1 \cdots a_k\, b_1 \cdots b_m, c_1 c_2 \cdots c_n\, c_1 c_2 \cdots c_n\, c_1 c_2 \cdots c_n \cdots} \\
10^{m+n} \cdot z &= \overline{a_1 \cdots a_k\, b_1 \cdots b_m\, c_1 c_2 \cdots c_n, c_1 c_2 \cdots c_n\, c_1 c_2 \cdots c_n \cdots} \\
(10^{m+n} - 10^m) \cdot z &= \overline{a_1 \cdots a_k\, b_1 \cdots b_m\, c_1 c_2 \cdots c_n} - \overline{a_1 \cdots a_k\, b_1 \cdots b_m} \in \mathbb{Z} \quad \square
\end{aligned}$$

Példa.

$$\left.\begin{aligned}
z &= 12,3456767 \cdots \\
1\,000z &= 12\,345, 6767 \cdots \\
100\,000z &= 1\,234\,567, 67 \cdots \\
99\,000z &= 1\,234\,567 - 12\,345 = 1\,222\,222
\end{aligned}\right\} \implies z = \frac{1\,222\,222}{99\,000} = \frac{611\,111}{49\,500}$$

Minden racionális szám periodikus tizedes tört

Tétel.

Minden racionális szám periodikus tizedes tört.

Bizonyítás.

Az állítás bizonyítható az „írásbeli" osztás algoritmusának elemzésével (előbb-utóbb lesz ismétlődő maradék). Íme egy másik bizonyítás:

Minden r racionális számot a tört bővítésével $r = \dfrac{a}{10^k b}$ alakra lehet hozni, ahol $\operatorname{lnko}(b, 10) = 1$. Az Euler–Fermat-tétel szerint ekkor $10^{\varphi(b)} \equiv 1 \pmod{b}$, azaz $b \mid 10^{\varphi(b)} - 1$. Ebből következik, hogy

$$r = \frac{a}{10^k b} \cdot \frac{10^{\varphi(b)} - 1}{10^{\varphi(b)} - 1} = \frac{1}{10^k \left(10^{\varphi(b)} - 1\right)} \cdot \underbrace{a \cdot \frac{10^{\varphi(b)} - 1}{b}}_{\in \mathbb{Z}}.$$

Tehát $\left(10^{k+\varphi(b)} - 10^k\right) \cdot r \in \mathbb{Z}$, ami – az előző tétel bizonyításának gondolatmenetét követve – azt jelenti, hogy r tizedes tört alakja periodikus. $\square$

Periódushossz

Megjegyzés.

A bizonyításból kiderült, hogy $\operatorname{lnko}(b, 10) = 1$ esetén az $\frac{1}{b}$ tört tizedes tört alakja $\varphi(b)$-periodikus. De nem mindig ez a legkisebb periódus. Például

$$\frac{1}{41} = 0,02439\,02439\,02439\cdots$$

legkisebb periódusa 5, míg $\varphi(41) = 40$. A bizonyítás gondolatmenetének kis módosításával belátható, hogy a legkisebb periódus nem más, mint a legkisebb olyan ℓ pozitív egész kitevő, amelyre $10^{\ell} \equiv 1 \pmod{b}$. Ezt az ℓ kitevőt nevezzük 10 modulo b rendjének.

Megjegyzés.

Mindezek 10-es helyett tetszőleges számrendszerben is meggondolhatók.
Például $\frac{1}{b}$ legkisebb periódusa a számrendszer alapszámának modulo b rendje lesz.
A számrendszer alapjának függvényében azt is meg lehet állapítani, hogy mely racionális törtek kifejtése lesz tiszta, illetve vegyes szakaszos (HF).

Tartalom

Laurent-sorok

Az $\mathbb{R}(\varepsilon)$ test (racionális törtek megfelelő rendezéssel) nem Cauchy-teljes. Hogy teljessé tegyük, polinomok (véges összegek) helyett Laurent-sorokat (végtelen összegeket) kell tekintenünk.

Definíció.

A valós számtest feletti formális Laurent-soron olyan $\sum a_k x^k \ (a_k \in \mathbb{R})$ alakú formális kifejezést értünk, amelyben az a_k együttható csak véges sok negatív k index esetén nem nulla (pozitív indexű együtthatóból lehet végtelen sok nem nulla):

$$\ell = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k \cdot x^k.$$

A formális Laurent-sorok halmazát $\mathbb{R}((x))$ jelöli.

Tétel.

A formális Laurent-sorok testet alkotnak.

Példa.

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots .$$

A Laurent-sorok rendezése

Azt szeretnénk, hogy x infinitezimálisan kicsi legyen, ezért ezentúl ε-t írunk helyette:

$$\ell = a_{-n} \cdot \frac{1}{\varepsilon^n} + \cdots + a_{-1} \cdot \frac{1}{\varepsilon} + a_0 + a_1 \cdot \varepsilon + a_2 \cdot \varepsilon^2 + \cdots .$$

Legyen P azon Laurent-sorok halmaza, amelyekben a legkisebb fokszámú tag együtthatója nemnegatív, és definiáljuk a rendezést szokásos módon:

$$\ell_1 \geq \ell_2 \iff \ell_1 - \ell_2 \in P.$$

Tétel.

A fent definiált rendezéssel $\mathbb{R}\left((\varepsilon)\right)$ Cauchy-teljes rendezett test, amelyben ε infinitezimális elem.

Megjegyzés.

Mivel $\mathbb{R}\left((\varepsilon)\right)$ tartalmaz infinitezimális elemet, nem arkhimédeszi, így nem lehet Dedekind-teljes sem. Ez a példa mutatja, hogy a Cauchy-teljességből nem következik a Dedekind-teljeség (csak akkor, ha feltesszük még az arkhimédeszi tulajdonságot is).

A Laurent-sorok kevesen vannak

A Laurent-sorok testében a következő „nagyságrendek” fordulnak elő:

$$\cdots \gg \frac{1}{\varepsilon^2} \gg \frac{1}{\varepsilon} \gg 1 \gg \varepsilon \gg \varepsilon^2 \gg \cdots .$$

Hiányolhatjuk $\sqrt{\varepsilon}$-t (és még sok minden mást); nem is csak mint nagyságrendet, hanem konkrétan, mint az ε elem négyzetgyökét: az $\mathbb{R}((\varepsilon))$ testben nincs minden pozitív elemnek négyzetgyöke. Ezen lehet segíteni újabb (nagyon sok) elem hozzávételével...

Ultraszűrők

Definíció.

Legyen $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$, azaz $\mathcal{U}$ természetes számokból álló halmazok egy családja. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{U}$ ultraszűrő, ha rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

- $\emptyset \notin \mathcal{U}$ és $\mathbb{N} \in \mathcal{U}$;
- $\forall U \in \mathcal{U}\ \forall I \subseteq \mathbb{N}\colon\ I \supseteq U \implies I \in \mathcal{U}$;
- $\forall U_1, U_2 \in \mathcal{U}\colon\ U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$;
- $\forall I \subseteq \mathbb{N}\colon\ I \in \mathcal{U}$ vagy $\mathbb{N} \setminus I \in \mathcal{U}$.

Állítás.

Ha $\mathcal{U}$ ultraszűrő, $I, J \subseteq \mathbb{N}$ és $I \cup J \in \mathcal{U}$, akkor I és J közül az egyik $\mathcal{U}$-ban van.

Példa.

Tetszőleges rögzített $n \in \mathbb{N}$ esetén az n-et tartalmazó halmazok halmaza ultraszűrő. Az ilyen szűrőt triviálisnak nevezzük.

Állítás.

Ha $\mathcal{U}$ nemtriviális ultraszűrő, akkor $\mathcal{U}$-ban csak végtelen halmazok vannak.

Ultrahatvány

Definíció.

Bevezetünk egy ekvivalenciarelációt a valós számsorozatok $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ halmazán:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \iff \{n \in \mathbb{N} : a_n = b_n\} \in \mathcal{U}.$$

Tétel.

Ha $\mathcal{U}$ nemtriviális ultraszűrő, akkor $\sim$ ekvivalenciareláció, sőt kongruenciája az $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}; +, \cdot)$ gyűrűnek, és a megfelelő faktorgyűrű rendezett test a következő rendezéssel:

$$\overline{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}} \leq \overline{\{b_n\}_{n=1}^{\infty}} \iff \{n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n\} \in \mathcal{U}.$$

Az $a \mapsto \overline{\{a\}_{n=1}^{\infty}}$ leképezés beágyazza $\mathbb{R}$-et ebbe a testbe.

Megjegyzés.

Ha igaz a kontinuumhipotézis, akkor a kapott faktortest (izomorfia erejéig) független az ultraszűrő megválasztásától.

Hipervalós számok

Az előző konstrukció által szolgáltatott testet (vagy azok bármelyikét) ${}^*\mathbb{R}$-rel jelöljük; ez a hipervalós számok teste. Ezen a testen pontosan ugyanazok az *elsőrendű* kijelentések igazak, mint a valós számok testén; például

$$\forall x:\ x \geq 0 \implies \exists y:\ y^2 = x.$$

Nem csak $\sqrt{x}$, hanem minden valós függvény egyértelműen kiterjed ${}^*\mathbb{R}$-ra.

Minden h véges hipervalós számhoz ($|h| \ll 1$) létezik egy egyértelműen meghatározott $\mathrm{st}(h)$ valós szám, amely infinitezimálisan közel van h-hoz:

$$\mathrm{st}(h) = \inf\left\{a \in \mathbb{R} : a > h\right\}.$$

Az $\mathrm{st}(h)$ valós számot a h hipervalós szám standard részének nevezzük.
A hipervalósakra épülő *nemstandard analízisben* például így fest a derivált fogalma:
Az f függvény deriváltja az a pontban b, ha

$$b = \mathrm{st}\left(\frac{f\left(a+\varepsilon\right) - f\left(a\right)}{\varepsilon}\right)$$

teljesül minden nullától különböző infinitezimális ε-ra.