

GALOIS-KAPCSOLATOK

Waldhauser Tamás

SZTE Bolyai Intézet

Eötvös Kollégium, Matematika Műhely

2022. október 12.

Van fogalmad?

fogalom = tartalom + terjedelem

- tartalom: a fogalmat meghatározó tulajdonságok
- terjedelem: a fogalomhoz tartozó „dolgok”

Példa

A **macska** fogalma:

- tartalom: állat, emlős, négy lábú, szőrös, nyávog, dorombol, cuki, ...
- terjedelem:



Matematikai modell

Kontextus:

1. objektumok egy G halmazra (németül Gegenstand)
2. tulajdonságok egy M halmazra (németül Merkmal)
3. minden $g \in G$ és $m \in M$ esetén meg van határozva, hogy g rendelkezik-e az m tulajdonsággal

Példa

$$G = \{T, K, Ny\}, \quad M = \{f, d, g, h, l\}$$

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

Galois-kapcsolat: objektumok \leftrightarrow tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza \rightsquigarrow közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza \rightsquigarrow a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

H	\rightsquigarrow	H'	\rightsquigarrow	H''	\rightsquigarrow	H'''	\rightsquigarrow	...
{T}	\rightsquigarrow	{d, h}	\rightsquigarrow	{T, K}	\rightsquigarrow	{d, h}	\rightsquigarrow	...
{K, Ny}	\rightsquigarrow	{f, h}	\rightsquigarrow	{K, Ny}	\rightsquigarrow	{f, h}	\rightsquigarrow	...
{f, d}	\rightsquigarrow	{K}	\rightsquigarrow	{f, d, g, h}	\rightsquigarrow	{K}	\rightsquigarrow	...
{d, h}	\rightsquigarrow	{T, K}	\rightsquigarrow	{d, h}	\rightsquigarrow	{T, K}	\rightsquigarrow	...

A fogalom fogalma

fogalom = (X, Y)

- X : terjedelem (objektumok)
- Y : tartalom (tulajdonságok)
- $X' = Y$ és $Y' = X$

Ha (X, Y) fogalom, akkor X és Y Galois-zárt halmazok:

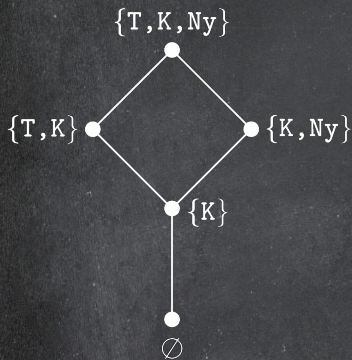
$$X'' = X \text{ és } Y'' = Y.$$

Példa

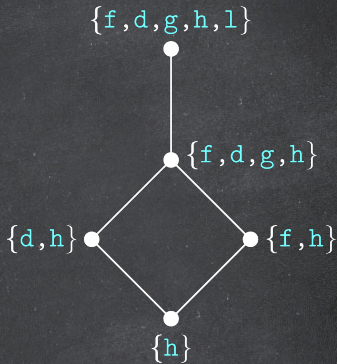
A mi kis példánkban mindössze 5 fogalom van:

1. $(\{\emptyset\}, \{f, d, g, h, l\})$
2. $(\{K\}, \{f, d, g, h\})$
3. $(\{T, K\}, \{d, h\})$
4. $(\{K, Ny\}, \{f, h\})$
5. $(\{T, K, Ny\}, \{h\})$

A zárt halmazok hálói

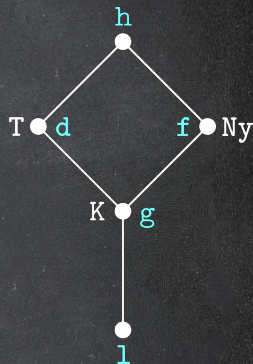
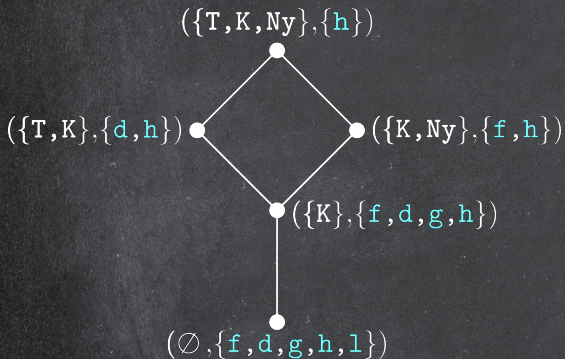


zárt objektumhalmazok



zárt tulajdonsághalmazok

Fogalomháló



Lámpakapcsolgatás

	ki	be	+	0	1	+	ps	ptl
nem nyomom	ki	be	0	0	1	ps	ps	ptl
megnyomom	be	ki	1	1	0	ptl	ptl	ps

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
nyomkodás:	0	1	1	1	0	0	0
nyomkodás:	0	0	0	1	1	1	0
nyomkodás:	1	1	1	0	0	0	0
lámpák:	1	0	0	0	1	1	0

Lámpakapcsolgatás

	ki	be	+	0	1	+	ps	ptl
nem nyomom	ki	be	0	0	1	ps	ps	ptl
megnyomom	be	ki	1	1	0	ptl	ptl	ps

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
nyomkodás:	0	1	1	1	0	0	0
nyomkodás:	0	0	0	1	1	1	0
nyomkodás:	1	1	1	0	0	0	0
lámpák:	1	0	0	0	1	1	0

$$x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_7 = 0$$

Lámpakapcsolgatás

	ki	be	+	0	1	+	ps	ptl
nem nyomom	ki	be	0	0	1	ps	ps	ptl
megnyomom	be	ki	1	1	0	ptl	ptl	ps

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
nyomkodás:	0	1	1	1	0	0	0
nyomkodás:	0	0	0	1	1	1	0
nyomkodás:	1	1	1	0	0	0	0
lámpák:	1	0	0	0	1	1	0

$$x_2 + x_3 + x_5 + x_6 = 0$$

Lámpakapcsolgatás

	ki	be	+	0	1	+	ps	ptl
nem nyomom	ki	be	0	0	1	ps	ps	ptl
megnyomom	be	ki	1	1	0	ptl	ptl	ps

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
nyomkodás:	0	1	1	1	0	0	0
nyomkodás:	0	0	0	1	1	1	0
nyomkodás:	1	1	1	0	0	0	0
lámpák:	1	0	0	0	1	1	0

$$x_1 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 = 0$$

Lámpakapcsolgatós Galois-kapcsolat

- objektumok: 0-1 sorozatok (nyomkodások, lámpák)
- tulajdonságok: egyenletek

Tétel

A Galois-zárt. . .

- objektumhalmazok: összeadásra („nyomkodásra”) zárt 0-1 sorozatok;
- tulajdonsághalmazok: következményekre zárt egyenlethalmazok.

Tétel

Ha adott megengedett nyomkodások egy halmaza, akkor ezekkel pontosan azok a konfigurációk érhetőek el, amelyek kielégítenek minden olyan egyenletet, amit a megengedett nyomkodások is kielégítenek.

Logikai kapuk

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	y	$x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

?

x	y	z	$m(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$m(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)$$

Logikai kapuk

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	y	$x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

?
~>

x	y	z	$m(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

A \vee és \wedge művelet **monoton**, de f nem az:

$$1 \leq 1, 1 \leq 1, 0 \leq 1 \text{ de } f(1, 1, 0) > f(1, 1, 1).$$

Galois-kapcsolat függvények és relációk között

- objektumok: függvények
- tulajdonságok: relációk

Tétel

A Galois-zárt. . .

- objektumhalmazok: kompozícióra zárt függvényhalmazok = **klónok**;
- tulajdonsághalmazok: pp-definíciókra zárt relációhalmazok.

Tétel

Ha adott függvények egy halmaza, akkor ezekből pontosan azok a függvények építhetők fel, amelyek kielégítenek minden olyan relációt, amit a kiindulási függvények is kielégítenek.

Boole-függvények klónjai: Post-háló

