Két sík kölcsönös helyzete

Két sík kölcsönös helyzete nem változik, ha mindkettőt ugyanazzal a vektorral eltoljuk, ezért az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy legalább az egyik sík átmegy az origón (és így altér). Legyen tehát $S_1 = U_1$, és legyen $S_2 = U_2 + v$, ahol $U_1, U_2 \leq V$ kétdimenziós alterek. Ekkor a két síkot tartalmazó legszűkebb lineáris sokaság (vagy affin altér) valójában „igazi" (lineáris) altér lesz, mégpedig $[S_1 \cup S_2] = U_1 + U_2 + [v]$. Nevezzük ezt a két sík affin burkának, és jelöljük a dimenzióját b-vel, a két sík metszetének dimenziója pedig legyen m (azzal a megállapodással, hogy az üres halmaz dimenziója -1). Ezzel a két számmal fogjuk leírni a két sík kölcsönös helyzetét.

Először nézzük azokat az eseteket, amikor a két sík metszi egymást. Eltolás erejéig feltehető, hogy az origó közös pontja a két síknak, tehát $S_1 = U_1$, $S_2 = U_2$ és $v = 0$. Ekkor $b = \dim(U_1 + U_2)$, és $m = \dim(U_1 \cap U_2)$. Az alterek dimenziótétele szerint

$$b = \dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2) = 2 + 2 - \dim(U_1 \cap U_2) = 4 - m.$$

Nyilván $0 \leq m \leq 2$, ezért a következő három eset lehetséges:

1. $m = 2$ és $b = 2$. Ekkor a két sík egybeesik. Példa:

$$S_1 = U_1 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2, \quad S_2 = U_2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2.$$

2. $m = 1$ és $b = 3$. Ekkor a két sík egy egyenesben metszi egymást. Példa:

$$S_1 = U_1 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} \leq \mathbb{R}^3, \quad S_2 = U_2 = \{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} \leq \mathbb{R}^3.$$

3. $m = 0$ és $b = 4$. Ekkor a két sík egyetlen pontban (az origóban) metszi egymást. Példa:

$$S_1 = U_1 = \{(x, y, 0, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} \leq \mathbb{R}^4, \quad S_2 = U_2 = \{(0, 0, z, t) : z, t \in \mathbb{R}\} \leq \mathbb{R}^4.$$

Most nézzük azokat az eseteket, amikor a két sík nem metszi egymást, azaz $m = -1$. Azt továbbra is feltehetjük, hogy S_1 átmegy az origón, azaz $S_1 = U_1$, de most már $S_2 = U_2 + v$, ahol $v \notin U_2$. Sőt, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ miatt $v \notin U_1 + U_2$ is teljesül (ugye?). Ezért $(U_1 + U_2) \cap [v] = \{0\}$, így az alterek dimenziótétele szerint

$$b = \dim((U_1 + U_2) + [v]) = \dim(U_1 + U_2) + \dim[v] - \dim((U_1 + U_2) \cap [v]) = \dim(U_1 + U_2) + 1 - 0 = \dim(U_1 + U_2) + 1.$$

Tehát a fenti három esetet kell megismételnünk, csak most az U_2 alteret eltoljuk (egy „új dimenzió" irányában), hogy U_1-től diszjunkt S_2 síkot kapjunk, és emiatt b értékét mindenütt 1-gyel meg kell növelnünk.

4. $m = -1$ és $b = 3$. Ekkor a két sík párhuzamos. Példa:

$$S_1 = U_1 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} \leq \mathbb{R}^3, \quad S_2 = \{(x, y, 1) : y, z \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

5. $m = -1$ és $b = 4$. Ekkor a két sík egy egyenesben „szeretné" metszeni egymást, de sajnos nem sikerül nekik. Példa:

$$S_1 = U_1 = \{(x, y, 0, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} \leq \mathbb{R}^4, \quad S_2 = \{(0, y, z, 1) : y, z \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

6. $m = -1$ és $b = 5$. Ekkor a két sík egyetlen pontban „szeretné" metszeni egymást, de sajnos nem sikerül nekik. Példa:

$$S_1 = U_1 = \{(x, y, 0, 0, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} \leq \mathbb{R}^5, \quad S_2 = \{(0, 0, z, t, 1) : z, t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^5.$$