SAJÁTÉRTÉK, SAJÁTVEKTOR, DIAGONALIZÁLHATÓSÁG

Waldhauser Tamás

SZTE Bolyai Intézet

Sajátérték, sajátvektor

Definíció

1. A $v \in V$ vektor a $\lambda \in T$ sajátérékhez tartozó sajátvektora a $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, V)$ lineáris transzformációnak, ha $v\varphi = \lambda v$ és $v \neq 0$.
2. A $v \in T^n$ vektor a $\lambda \in T$ sajátérékhez tartozó sajátvektora az $A \in T^{n \times n}$ mátrixnak, ha $vA = \lambda v$ és $v \neq 0$.

Állítás

Legyen V vektortér a T test felett, legyen $\mathcal{E}$ egy bázisa V-nek, és legyen $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, V)$ egy lineáris transzformáció.
Ekkor tetszőleges $v \in V$ vektorra és λ skalárra ekvivalens az alábbiak:

1. v a λ sajátérékhez tartozó sajátvektora a φ transzformációnak;
2. $[\![v]\!]_{\mathcal{E}}$ a λ sajátérékhez tartozó sajátvektora a $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{E}}$ mátrixnak.

Bizonyítás.
[SzL: 14.2] ■

Karakterisztikus polinom

Definíció

Az $A \in T^{n\times n}$ mátrix karakterisztikus polinomján a $p_A(x) = \det(A - xE)$ polinomot értjük:

$$p_A(x) = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - x \end{vmatrix}.$$

Megjegyzés

Figyeljük meg, hogy $p_A(x) \in T[x]$ egy n-edfokú polinom:

$$p_A(x) = (-1)^n \cdot x^n + (-1)^{n-1} \cdot \mathrm{tr}(A) \cdot x^{n-1} + \cdots + \det(A).$$

Itt $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn}$ az A mátrix nyoma.

Karakterisztikus polinom

Állítás

Hasonló mátrixok karakterisztikus polinomja megegyezik.

Bizonyítás.

[SzL: 14.3] ■

Megjegyzés

A fenti állítás szerint van értelme lineáris transzformáció karakterisztikus polinomjáról beszélni, hiszen a transzformáció különböző bázisokhoz tartozó mátrixainak ugyanaz a karakterisztikus polinomja.

Tétel

A $\lambda \in T$ skalár akkor és csak akkor sajátértéke az $A \in T^{n \times n}$ mátrixnak, ha gyöke A karakterisztikus polinomjának.
(Ugyanez érvényes mátrixok helyett lineáris transzformációkra is.)

Bizonyítás.

[SzL: 14.2] ■

Sajátaltér

Definíció

A $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, V)$ lineáris transzformáció λ sajátértékhez tartozó **sajátalterén** az $S_\lambda = \{v \in V : v\varphi = \lambda v\}$ halmazt értjük.

Állítás

Az S_λ sajátaltér...

1. valóban altere V-nek;
2. invariáns φ-re.

Bizonyítás.

1. $S_\lambda = \ker(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id})$;
2. $v \in S_\lambda \implies v\varphi = \lambda v \in S_\lambda$. ■

Invariáns alterek direkt összege

Tétel

- Tfh. $\varphi\colon V \to V$ lineáris transzformáció;
- $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k$, ahol az $U_i \leq V$ alterek invariánsak φ-re;
- $\mathcal{B}_i$ bázis U_i-ben; tudjuk, hogy ekkor $\mathcal{B} := \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$ bázisa V-nek;
- $\varphi|_{U_i} \in \mathrm{Hom}(U_i, U_i)$ mátrixa a $\mathcal{B}_i$ bázisban A_i.

Ekkor φ mátrixa a $\mathcal{B}$ bázisban:

$$[\![\varphi]\!]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_k} \end{pmatrix}.$$

Bizonyítás.

A táblán (volt). ∎

Sajátalterek direkt összege

Tétel

Ha a φ lineáris transzformációnak $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ páronként különböző sajátértékei, akkor a hozzájuk tartozó sajátalterek összege direkt összeg:

$$S_{\lambda_1} + \cdots + S_{\lambda_k} = S_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus S_{\lambda_k}.$$

Bizonyítás.

A táblán (lesz). ■

Megjegyzés

A fenti tételnek egy ekvivalens átfogalmazása: különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok mindig lineárisan függetlenek.

Megjegyzés

Ha van „elég sok" sajátvektor, akkor a sajátalterek összege kiadja az egész V vektorteret. Ekkor van sajátvektorokból álló bázis (sajátbázis), és ebben a bázisban φ mátrixa diagonális. Ha nem, akkor. . .

Sajátalterek direkt összege

Vegyünk egy $\mathcal{B}_i$ bázist mindegyik S_{λ_i} sajátaltérben, és egészítsük ki a $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$ halmazt V egy $\mathcal{B}$ bázisává. Ebben a bázisban φ mátrixa:

$$A = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}
\lambda_1 & & & & & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & & & & & \\
& & \lambda_1 & & & & & & & & & & \\
& & & \lambda_2 & & & & & & & & & \\
& & & & \ddots & & & & & & & & \\
& & & & & \lambda_2 & & & & & & & \\
& & & & & & \ddots & & & & & & \\
& & & & & & & \lambda_k & & & & & \\
& & & & & & & & \ddots & & & & \\
& & & & & & & & & \lambda_k & & & \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \cdots & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \cdots & *
\end{pmatrix}$$

Geometriai és algebrai multiplicitás

Definíció

- A λ_i sajátérték geometriai multiplicitásán az S_{λ_i} sajátaltér dimenzióját értjük. Jelölés: g_i.
- A λ_i sajátérték algebrai multiplicitásán azt értjük, hogy hányszoros gyöke a karakterisztikus polinomnak. Jelölés: a_i.

Példa

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^4, \qquad p_A = x^4 + x = x(x-2)^3$$

$$S_0 = [0121], \qquad S_2 = [2210, 2201]$$

Tehát két sajátérték van:

- $\lambda_1 = 0$, algebrai mult. $a_1 = 1$, geometriai mult. $g_1 = 1$;
- $\lambda_2 = 2$, algebrai mult. $a_2 = 3$, geometriai mult. $g_2 = 2$.

Diagonalizálási kísérlet

Példa (folyt.)

Egészítsük ki a sajátalterekben talált bázisokat $\mathbb{Z}_3^4$ egy $\mathcal{B}$ bázisává:

$$b_1 = 0121, \quad b_2 = 2210, \quad b_3 = 2201, \quad b_4 = 1000.$$

A bázisátmenetek mátrixai ($\mathcal{E}$ a standard bázis):

$$[\![\mathcal{B} \to \mathcal{E}]\!] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad [\![\mathcal{E} \to \mathcal{B}]\!] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A $\varphi \colon v \mapsto vA$ lineáris transzformáció mátrixa a $\mathcal{B}$ bázisban:

$$[\![\varphi]\!]_{\mathcal{B}} = [\![\mathcal{B} \to \mathcal{E}]\!] \cdot A \cdot [\![\mathcal{E} \to \mathcal{B}]\!] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Geometriai és algebrai multiplicitás

Tétel

A geometriai multiplicitás nem nagyobb, mint az algebrai multiplicitás:

$$g_i \leq a_i \qquad (i = 1, \ldots, k).$$

Bizonyítás.

Vegyük észre, hogy az A mátrixban g_i db λ_i szerepel.

Írjuk fel φ karakterisztikus polinomját az $A - xE$ mátrix determinánsaként, és fejtsük ki a determinánst az első $g_1 + \cdots + g_k$ sora szerint:

$$p_A(x) = |A - xE| \sim (x - \lambda_1)^{g_1} \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_k)^{g_k} \cdot \begin{vmatrix} * - x & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * - x \end{vmatrix}.$$

Innen látható, hogy a $p_A(x)$ polinomnak λ_i legalább g_i-szeres gyöke, tehát $a_i \geq g_i$. ∎

Diagonalizálhatóság

Definíció

Azt mondjuk, hogy...

- a $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, V)$ lineáris transzformáció diagonalizálható, ha van V-nek olyan bázisa, melyben φ mátrixa diagonális;
- az $A \in T^{n \times n}$ mátrix diagonalizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz (van olyan Q nemelfajuló mátrix, hogy $Q^{-1}AQ$ diagonális).

Tétel

Ha $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, V)$, és $\dim V = n$, akkor φ diagonalizálhatóságnak...

1. szükséges és elegendő feltétele: $\sum g_i = n$;
2. szükséges és elegendő feltétele: $\sum a_i = n$ és $g_i = a_i$ (minden i-re);
3. szükséges feltétele: $\sum a_i = n$;
4. szükséges feltétele: $g_i = a_i$ (minden i-re);
5. elegendő feltétele: $k = n$ és $a_1 = \cdots = a_n = 1$.

Diagonalizálhatóság

Tétel

Ha $A \in T^{n \times n}$ diagonalizálható, akkor...

1. A karakterisztikus polinom lineáris tényezőkre bomlik T felett:

$$p_A(x) \sim (x - \lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_k)^{m_k}.$$

   Itt $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ az A mátrix sajátérékei; a λ_i sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása is m_i (és persze $m_1 + \cdots + m_k = n$).

2. A sajátértékek szorzata a determináns, összegük pedig a nyom:

$$\lambda_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot \lambda_k^{m_k} = \det(A), \quad \text{és} \quad m_1 \cdot \lambda_1 + \ldots + m_k \cdot \lambda_k = \operatorname{tr}(A).$$

3. Van olyan $Q \in T^{n \times n}$ nemelfajuló mátrix, amelyre

$$QAQ^{-1} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_k, \ldots, \lambda_k) =: D.$$

4. A Q mátrix sorai A-nak bal oldali sajátvektorai, a Q^{-1} mátrix oszlopai A-nak jobb oldali sajátvektorai.

Diagonalizálható mátrix hatványai

Tfh. A diagonalizálható, és

$$QAQ^{-1} = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \ \dots, \ \lambda_k, \dots, \lambda_k) = \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

(Itt $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ is a sajátértékek listája, csak most nem figyelünk arra, hogy melyek egyeznek meg.)

Ekkor $A = Q^{-1}DQ$, sőt

$$\begin{aligned} A^m &= Q^{-1}DQ \cdot Q^{-1}DQ \cdot \ldots \cdot Q^{-1}DQ \\ &= Q^{-1}DQ \cdot Q^{-1}DQ \cdot \ldots \cdot Q^{-1}DQ \\ &= Q^{-1} \cdot D \cdot \ldots \cdot D \cdot Q \\ &= Q^{-1} \cdot D^m \cdot Q \\ &= Q^{-1} \cdot \mathrm{diag}(\alpha_1^m, \dots, \alpha_n^m) \cdot Q. \end{aligned}$$

Alkalmazások

- lineáris rekurziók: tavaly
- Markov-láncok: most
- képtömörítés: később

Markov-láncok

Diszkrét idejű, véges, homogén Markov-lánc:

- olyan rendszer, ami n-féle állapotban lehet;
- ha most az i-edik állapotban van, akkor p_{ij} valószínűséggel lép a j-edik állapotba.

Az átmenetvalószínűségek egy $P = (p_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sztochasztikus mátrixot alkotnak:

1. $0 \leq p_{ij} \leq 1$ minden i és j esetén;
2. $p_{i1} + \cdots + p_{in} = 1$ minden i esetén (azaz minden sorösszeg 1).

Fontos észrevételek:

1. a k-lépéses átmenetvalószínűségeket a P^k mátrix elemei adják;
2. $P \cdot \mathbb{1} = \mathbb{1}$, tehát $\mathbb{1}$ jobb oldali sajátvektora P-nek,
3. ezért 1 sajátértéke P-nek, azaz gyöke a karakterisztikus polinomnak,
4. és így van megfelelő bal oldali sajátvektor is ($v \cdot P = v$).

Markov-láncok

A pozitív (nemnegatív) elemű mátrixoknak külön elmélete van.
Egy nevezetes tétel:

Tétel (Perron-Frobenius)

Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ csupa pozitív számból áll, akkor

1. van egy pozitív λ sajátértéke, amelynél minden más (komplex) sajátérték abszolút értékben kisebb (spektrálsugár);
2. a λ sajátérték algebrai multiplicitása 1 (és így a geometriai is 1);
3. van olyan λ-hoz tartozó sajátvektor, amelynek minden eleme pozitív.

Pozitív sztochasztikus mátrixoknál $\lambda = 1$, és a megfelelő pozitív bal oldali sajátvektor választható úgy, hogy elemeinek összege 1 legyen:

$$v = (q_1, \ldots, q_n), \quad 0 < q_i < 1, \quad q_1 + \cdots + q_n = 1, \quad \text{és} \quad vP = v.$$

A v vektort a Markov-lánc stacionárius eloszlásának nevezzük.