LINEÁRIS ALGEBRA II

gyakorló és házi feladatok

2022 őszi félév, BSc

1. feladat. Tekintsük az $\mathbb{R}^5$ vektortérben az alábbi W alteret:

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 - x_4 = 0,\ x_1 - x_2 - x_3 = 0,\ 3x_1 - x_5 = 0\}.$$

Adjon meg bázist a W altérben.

Megoldás. Felírjuk az egyenletrendszer mátrixát (mivel homogén, a konstansok oszlopát nem kell kiírni), és elemi sorátalakításokkal redukált lépcsős alakra hozzuk:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1/3 \end{pmatrix}.$$

A redukált lépcsős alakból látszik, hogy x_1, x_2, x_4 lehet kötött változó, x_3, x_5 pedig szabad változók:

$$x_1 = \tfrac{1}{3}x_5, \quad x_2 = -x_3 + \tfrac{1}{3}x_5, \quad x_4 = \tfrac{1}{3}x_5 \quad (x_3, x_5 \in \mathbb{R}).$$

Tehát a W altér paraméteres felírása (az $x_3 = a$, $x_5 = b$ paraméterekkel):

$$W = \left\{ \left(\tfrac{1}{3}b,\ -a + \tfrac{1}{3}b,\ a,\ \tfrac{1}{3}b,\ b\right) : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

A paraméterek egyikének 1 értéket adunk, a többinek nullát, minden lehetséges módon. Így kapunk egy bázist W-ben:

$$w_1 = \big(0,\ -1,\ 1,\ 0,\ 0\big), \quad w_2 = \big(\tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{3},\ 0,\ \tfrac{1}{3},\ 1\big).$$

Megjegyzés. Az, hogy az elimináció során nem keletkezett csupa nulla sor, azt jelenti, hogy a feladatban megadott három egyenlet független; kevesebb egyenlettel nem lehet W-t leírni.

---

2. feladat. Tekintsük az $\mathbb{R}^5$ vektortérben az alábbi három vektort:

$$u_1 = (1, 4, -3, 1, 3), \quad u_2 = (-2, 1, 0, 1, 0), \quad u_3 = (3, -2, -1, 1, 1).$$

Írja le az u_1, u_2, u_3 vektorok által kifeszített U alteret, vagyis adja meg, hogy milyen összefüggéseknek kell teljesülniük az x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 számok között ahhoz, hogy az $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ vektor előálljon u_1, u_2, u_3 lineáris kombinációjaként. Másképp fogalmazva: adjon meg olyan homogén lineáris egyenletrendszert, amelynek megoldástere éppen U.

Megoldás. Írjuk egymás alá a három vektort, és oldjuk meg az így kapott mátrixhoz tartozó homogén lineáris egyenletrendszert. Ehhez hozzuk elemi sorátalakításokkal redukált lépcsős alakra a mátrixot:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

A redukált lépcsős alakból látszik, hogy x_1, x_2, x_3 lehet kötött változó, x_4, x_5 pedig szabad változók:

$$x_1 = x_4, \quad x_2 = x_4, \quad x_3 = 2x_4 + x_5 \quad (x_4, x_5 \in \mathbb{R}).$$

Tehát az egyenletrendszer megoldásterének paraméteres felírása (az $x_4 = a$, $x_5 = b$ paraméterekkel):

$$W := U^\perp = \left\{ \left(a,\ a,\ 2a + b,\ a,\ b\right) : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

A paraméterek egyikének 1 értéket adunk, a többinek nullát, minden lehetséges módon. Így kapunk egy bázist $U^\perp$-ben:

$$w_1 = \big(1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 0\big), \quad w_2 = \big(0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1\big).$$

Ez a két vektor az $x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$ és $x_3 + x_5 = 0$ egyenleteknek felel meg. Tehát

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0,\ x_3 + x_5 = 0\}.$$

Megjegyzés. A redukált lépcsős alak sorai megadnak egy bázist U-ban. Innen látszik, hogy $\dim U = 3$, és a feladatban megadott u_1, u_2, u_3 generátorrendszer is bázis. (Másképp fogalmazva: abból, hogy az elimináció során nem keletkezett csupa nulla sor, következik, hogy u_1, u_2, u_3 lineárisan független vektorrendszer.)

---

3. feladat. Tekintsük az előző két feladatbeli W és U altereket $\mathbb{R}^5$-ben, és határozzuk meg az összegüket és a metszetüket. Mindkettőt adjuk meg bázissal és egyenletrendszer megoldástereként is.

Megoldás. Ha a két bázist egymás mellé (vagy inkább alá) tesszük, akkor máris megvan $W+U$ egy generátorrendszere (W-nél w_2 helyett $3w_2$-t használjuk, hogy ne legyenek törtek, U-nál pedig a 2. feladatban kapott redukált lépcsős alakú mátrix sorait). Hogy kiderüljön, lehet-e ötnél kevesebb vektorral generálni, illetve, hogy megkapjuk az „egyenletrendszeres" leírást, hozzuk a mátrixot redukált lépcsős alakra:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ebből látszik, hogy $W+U$ négydimenziós, a kapott mátrix első négy sora ad egy bázist, valamint – a 2. feladat megoldásához hasonlóan – kiolvasható a redukált lépcsős alakból $W+U$ „egyenletrendszeres" leírása is:

$$\begin{aligned} W+U &= \big[(1,0,0,0,1),\ (0,1,0,0,1),\ (0,0,1,0,1),\ (0,0,0,1,1)\big] \\ &= \big\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1+x_2+x_3+x_4-x_5=0\big\}. \end{aligned}$$

A $W \cap U$ altérnél az altereket leíró egyenleteket kell összerakni:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tehát nem kell öt egyenlet, elég négy is (a mátrix első négy sora adja az egyenletekbeli együtthatókat), és – az 1. feladat megoldásához hasonlóan – kapunk egy bázist is (beszoroztunk mindent 3-mal, hogy eltűnjenek a törtek):

$$\begin{aligned} W \cap U &= \big\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 : 3x_1-x_5=0,\ 3x_2-4x_5=0,\ x_3+x_5=0,\ 3x_4-x_5=0\big\} \\ &= \big[(1,4,-3,1,3)\big]. \end{aligned}$$

---

4. feladat. Tekintsük most az 1. és 2. feladatbeli W, U altereket $\mathbb{Z}_2$ felett, és határozzuk meg az összegüket és metszetüket. Mind a négy alteret adjuk meg bázissal és egyenletrendszerrel is.

Megoldás. Az 1. feladatbeli mátrixot most $\mathbb{Z}_2$ felett tekintjük, és redukált lépcsős alakra hozzuk:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Ebből kiolvashatjuk W kétféle leírását:

$$\begin{aligned} W &= \big\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_2^5 : x_1+x_5=0,\ x_2+x_3+x_5=0,\ x_4+x_5=0\big\} \\ &= \big[(0,1,1,0,0),\ (1,1,0,1,1)\big]. \end{aligned}$$

A 2. feladatbeli mátrixot is redukált lépcsős alakra hozzuk $\mathbb{Z}_2$ felett:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ebből kiolvashatjuk U kétféle leírását:

$$\begin{aligned} U &= \big[(1,0,1,1,1),\ (0,1,0,1,0)\big] \\ &= \big\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_2^5 : x_1+x_3=0,\ x_1+x_2+x_4=0,\ x_1+x_5=0\big\}. \end{aligned}$$

Írjuk egymás alá W és U bázisát, és hozzuk a mátrixot redukált lépcsős alakra:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ebből kiolvashatjuk $W+U$ kétféle leírását:

$$\begin{aligned} W+U &= \big[(1,0,0,0,1),\ (0,1,0,1,0),\ (0,0,1,1,0)\big] \\ &= \big\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_2^5 : x_2+x_3+x_4=0,\ x_1+x_5=0\big\}. \end{aligned}$$

Írjuk egymás alá W és U egyenleteit, és hozzuk a mátrixot redukált lépcsős alakra:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ebből kiolvashatjuk $W \cap U$ kétféle leírását:

$$\begin{aligned} W \cap U &= \big\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_2^5 : x_1 + x_5 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 + x_5 = 0,\ x_4 + x_5 = 0 \big\} \\ &= \big[(1, 0, 1, 1, 1) \big]. \end{aligned}$$

Megjegyzések.

1. A W altérre ugyanazt kaptuk, mintha az 1. feladat végeredményét vettük volna modulo 2 (hogyan kell az $\frac{1}{3}$ törtet $\mathbb{Z}_2$-ben értelmezni?). Az U altérnél viszont nem ugyanazt kaptuk, mintha a 2. feladat végeredményét vettük volna modulo 2 (még a dimenzió se stimmel!). Mi lehet ennek az oka?
2. Tanulságos lehet felsorolni a négy altér elemeit, és ellenőrizni a metszetet meg az összeget:

$$\begin{aligned} W &= \{00000, 10111, 01100, 11011\}; \\ U &= \{00000, 10111, 01010, 11101\}; \\ W \cap U &= \{00000, 10111\}; \\ W + U &= \{00000, 10111, 01100, 11011, 01010, 11101, 00110, 10001\}. \end{aligned}$$

---

5. feladat. Tekintsük a $\mathbb{Z}_2^6$ vektortérben az alábbi U és V altereket:

$$\begin{aligned} U &= [100011, 010010, 001010, 000111] \\ V &= \big\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathbb{Z}_2^6 : x_1 + x_4 + x_6 = 0,\ x_2 + x_3 = 0,\ x_2 + x_4 + x_5 = 0 \big\}. \end{aligned}$$

Határozza meg az $U + V$ és $U \cap V$ altereket. Mindkettőt adja meg bázissal is és egyenletrendszer megoldástereként is.

6. feladat. Igazolja, hogy a pozitív valós számok halmaza vektorteret alkot $\mathbb{R}$ felett, ha az „összeadást” és a „skalárral való szorzást” a következőképpen definiáljuk:

$$u \oplus v = uv, \quad \lambda \odot v = v^\lambda \qquad (u, v \in \mathbb{R}^+,\ \lambda \in \mathbb{R}).$$

7. feladat. Igazolja, hogy bármely halmaz hatványhalmaza vektorteret alkot $\mathbb{Z}_2$ felett, ha „összeadásnak” a szimmetrikus differencia képzését tekintjük. (A $\mathbb{Z}_2$-beli skalárokkal való szorzást miért nem kell külön definiálni?)

8. feladat. Írja le a $\mathbb{Z}_2^3$ vektortér összes alterét, és rajzolja fel az altérhálót.

9. feladat. Alteret alkotnak-e a valós számsorozatok $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ vektorterében az alábbi halmazok? A nemleges választ konkrét ellenpéldával indokolja!

(a) U_1: korlátos sorozatok halmaza

(b) U_2: monoton sorozatok halmaza

(c) U_3: számtani sorozatok halmaza

(d) U_4: mértani sorozatok halmaza

10. feladat. Alteret alkotnak-e a valós $n \times n$-es mátrixok $\mathbb{R}^{n \times n}$ vektorterében az alábbi halmazok? A nemleges választ konkrét ellenpéldával indokolja!

(a) $U_1 = \{A : |A| = 0\}$

(b) $U_2 = \{A : A^T = A\}$

(c) $U_3 = \{A : AB = BA\}$, ahol B egy adott mátrix

(d) $U_4 = \{A : AB = B\}$, ahol B egy adott mátrix

11. feladat. Mutassa meg, hogy az $\{\alpha \sin(x + \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ halmaz alteret alkot a valós függvények $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ vektorterében.

12. feladat. Igazolja, hogy egy vektortér soha nem állhat elő két valódi alterének uniójaként.

13. feladat. Igazolja, hogy $n \geq 2$ esetén a $\mathbb{Z}_2^n$ vektortér előáll három valódi alterének uniójaként.

14. feladat. Tekintsük a valós számok halmazát vektortérnek $\mathbb{Q}$ felett, a szokásos műveletekkel (mit jelent ez?). Mi lesz a $\{\log p : p \text{ prímszám}\}$ halmaz által generált altér ebben a vektortérben?

15. feladat. Legyen u, v, w három vektor egy tetszőleges vektortérben. Mit lehet mondani az u vektorról, ha tudjuk, hogy $w \notin [u, v]$, $v \notin [u, w]$, de $u \in [v, w]$?

16. feladat. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges vektortér tetszőleges $U,\ V,\ W$ altereire

$$U \subseteq W \implies (U + V) \cap W = U + (V \cap W).$$

---

17. feladat. Tekintsük a $\mathbb{Z}_3^4$ vektortérben az alábbi b_1, b_2, b_3, b_4 bázist:

$$b_1 = 1011,\ b_2 = 1112,\ b_3 = 2002,\ b_4 = 1121.$$

Számítsuk ki a $v = 1222$ vektor koordinátáit ebben a bázisban.

Megoldás. A $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 + \lambda_4 b_4 = v$ egyenletet kell megoldanunk a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{Z}_3$ ismeretlenekre nézve. Írjuk fel az egyenletrendszer mátrixát, és hozzuk elemi sorátalakításokkal redukált lépcsős alakra.

$$\begin{array}{cccc|c} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & v \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}$$

Tehát a koordináták: $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 0,\ \lambda_4 = 1$.

---

18. feladat. Szűkítsük a $[v_1, v_2, v_3, v_4]$ altér bázisává a v_1, v_2, v_3, v_4 vektorrendszert.

$$v_1 = (1, 2, 4, 1), \quad v_2 = (-2, -4, -5, -3), \quad v_3 = (-1, -2, -7, 0), \quad v_4 = (1, 2, -2, 3)$$

Megoldás. A vektorokat oszlopvektorokként egymás mellé írjuk, és a kapott mátrixot elemi sorátalakításokkal redukált lépcsős alakra hozzuk:

$$\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -2 & 2 \\ 4 & -5 & -7 & -2 \\ 1 & -3 & 0 & 3 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{cccc} v_1' & v_2' & v_3' & v_4' \\ \boxed{1} & 0 & -3 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -2. \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

A kapott mátrixról látszik, hogy első két oszlopa lineárisan független, a többi pedig kifejezhető az első két oszlop lineáris kombinációjaként. Mivel az elemi sorátalakítások nem változtatják meg az oszlopok közötti lineáris összefüggéseket, ugyanez érvényes az eredeti mátrixra is. Tehát v_1, v_2 lineárisan független, v_3 és v_4 pedig kifejezhető v_1, v_2 lineáris kombinációjaként (konkrétan $v_3 = -3v_1 - v_2$ és $v_4 = -3v_1 - 2v_2$). Ezért v_1, v_2 bázisa a $[v_1, v_2, v_3, v_4]$ altérnek (amiről így kiderült, hogy kétdimenziós).

---

19. feladat. Szűkítsük a $[v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6]$ altér bázisává a $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ vektorrendszert.

$$v_1 = (1, -1, 2, 0), \quad v_2 = (-1, 2, -5, -1), \quad v_3 = (0, 1, -3, -1), \quad v_4 = (2, -1, 2, 0), \quad v_5 = (1, 2, -6, -2), \quad v_6 = (-3, 3, -4, 3)$$

Megoldás. A vektorokat oszlopvektorokként egymás mellé írjuk, és a kapott mátrixot elemi sorátalakításokkal redukált lépcsős alakra hozzuk:

$$\begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & 2 & -6 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -2 & 3 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{cccccc} v_1' & v_2' & v_3' & v_4' & v_5' & v_6' \\ \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{array}$$

Az előző feladathoz hasonlóan leolvasható, hogy v_1, v_2, v_4, v_6 lineárisan független, továbbá $v_3 = v_1 + v_2$ és $v_5 = v_1 + 2v_2 + v_4$. Ezért v_1, v_2, v_4, v_6 bázisa a $[v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6]$ altérnek (amiről így kiderült, hogy nem más, mint $\mathbb{R}^4$).

---

20. feladat. Bővítsük $\mathbb{R}^4$ bázisává a v_1, v_2 vektorrendszert.

$$v_1 = (3, 2, 2, 3), \quad v_2 = (6, 1, 2, 3)$$

Megoldás. A vektorokat oszlopvektorokként egymás mellé írjuk, melléjük tesszük még $\mathbb{R}^4$ egy tetszőleges bázisát (pl. az e_1, e_2, e_3, e_4 standard bázist) és a kapott mátrixot elemi sorátalakításokkal redukált lépcsős alakra hozzuk:

$$\begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 3 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{cccccc} v_1' & v_2' & e_1' & e_2' & e_3' & e_4' \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 0 & 2/3. \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -2/3 \end{array}$$

Az előző feladathoz hasonlóan leolvasható, hogy v_1, v_2, e_1, e_3 bázisa a $[v_1, v_2, e_1, e_2, e_3, e_4] = \mathbb{R}^4$ (al)térnek.

---

21. feladat. Legyen $u_1, \ldots, u_k$ lineárisan független vektorrendszer a V valós vektortérben, és legyen $v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k$. Bizonyítsa be, hogy amennyiben $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k \neq 1$, akkor az $u_1 - v, \ldots, u_k - v$ vektorrendszer is lineárisan független.

22. feladat. Adjon meg bázist a 10. feladatban szereplő U_2 és U_3 alterekben és állapítsa meg a dimenziójukat, ha az U_3 altérnél B az alábbi mátrix.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

23. feladat. Az $S \subseteq \mathbb{R}^n$ halmazt lineáris sokaságnak nevezzük, ha van olyan $U \leq \mathbb{R}^n$ altér és $v_0 \in \mathbb{R}^n$ vektor, hogy $S = U + v_0 = \{u + v_0 : u \in U\}$. Ez szemléletesen azt jelenti, hogy S úgy keletkezik, hogy az U alteret a v_0 vektorral eltoljuk. Ha $\dim U = 1$, akkor S egy egyenes, ha $\dim U = 2$, akkor S egy sík. Mutassa meg, hogy bármely két síkhoz lehet találni olyan legfeljebb ötdimenziós sokaságot, ami mindkét síkot tartalmazza.

24. feladat. Bizonyítsa be, hogy az alábbi p_0, p_1, p_2, p_3 polinomok bázist alkotnak a legfeljebb harmadfokú valós polinomok vektorterében, és határozza meg az $\frac{7}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{14}{3}x + 2$ polinom koordinátáit ebben a bázisban.

$$p_0 = 1, \quad p_1 = x, \quad p_2 = \frac{x(x-1)}{2}, \quad p_3 = \frac{x(x-1)(x-2)}{6}$$

A megoldáshoz szabad számítógépet használni, de pontosan le kell írni, hogy mit és hogyan számíttatott ki géppel, és hogyan értelmezi a gép által adott eredményt.

25. feladat. Létezik-e olyan végtelen vektorrendszer az $\mathbb{R}^n$ vektortérben, amelynek minden n-elemű részrendszere lineárisan független?

26. feladat. Az $\mathbb{R}^2$ halmaz nemcsak $\mathbb{R}$ felett, hanem $\mathbb{Q}$ felett is vektorteret alkot (ugye?).

(a) Igaz-e, hogy ha $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ lineárisan független $\mathbb{R}$ felett, akkor lineárisan független $\mathbb{Q}$ felett is? Ha igaz, bizonyítsa be; ha nem, adjon egy <u>konkrét</u> ellenpéldát.

(b) Igaz-e, hogy ha $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ lineárisan független $\mathbb{Q}$ felett, akkor lineárisan független $\mathbb{R}$ felett is? Ha igaz, bizonyítsa be; ha nem, adjon egy <u>konkrét</u> ellenpéldát.

---

27. feladat. Tekintsük a $\mathbb{Z}_3^6$ vektortérben az $U = [u_1, u_2, u_3]$ és $V = [v_1, v_2, v_3, v_4]$ altereket.

$$u_1 = 100210,\ u_2 = 010002,\ u_3 = 001000, \qquad v_1 = 102001,\ v_2 = 011002,\ v_3 = 000100,\ v_4 = 000010$$

Adjunk meg egy bázist az $U \cap V$ altérben, majd egészítsük ki ezt U, illetve V bázisává.

Megoldás. A metszet meghatározásához mindkét alteret le kell írnunk egy-egy egyenletrendszerrel. A bázisvektorokat egymás alá írva máris redukált lépcsős alakú mátrixot kapunk (mindkét altérnél), ezért rögtön le tudjuk olvasni az egyenletrendszereket.

$$\begin{array}{r|cccccc} & & & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ u_1 = & \boxed{1} & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ u_2 = & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 2 \\ u_3 = & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline \mathrm{ER}(U): & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|cccccc} & & & \downarrow & & & \downarrow \\ v_1 = & \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ v_2 = & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 2 \\ v_3 = & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ v_4 = & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ \hline \mathrm{ER}(V): & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Egymás alá írjuk a két egyenletrendszert, és elemi sorátalakításokkal redukált lépcsős alakra hozzuk a mátrixot.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{cccccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}$$

Ebből ki tudjuk olvasni $U \cap V$ egy bázisát.

$$\begin{array}{r|cccccc} & & & & & & \downarrow \\ \mathrm{ER}(U \cap V): & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ \hline w = & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Tehát $U \cap V = [w]$ egydimenziós altér.

Hogy megkapjuk U egy olyan bázisát, amely tartalmazza a w vektort, írjuk egymás mellé oszlopvektorként a w, u_1, u_2, u_3 vektorokat úgy, hogy w legyen az első, és hozzuk elemi sorátalakításokkal redukált lépcsős alakra a mátrixot.

$$
\begin{array}{cccc}
w & u_1 & u_2 & u_3 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 1 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 2 & 0
\end{array}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{array}{cccc}
w' & u_1' & u_2' & u_3' \\
\boxed{1} & 0 & 0 & 2 \\
0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Innen látszik, hogy w, u_1, u_2 lineárisan független vektorrendszer, és így bázisa U-nak.
Hasonló módon kaphatunk V-ben egy olyan bázist, amely tartalmazza a w vektort.

$$
\begin{array}{ccccc}
w & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 2 & 0 & 0
\end{array}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{array}{ccccc}
w' & v_1' & v_2' & v_3' & v_4' \\
\boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 0 \\
0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Innen látszik, hogy pl. w, v_1, v_3, v_4 bázisa V-nek. (Az is látható, hogy $v_2 = 2w$, tehát v_2 semmiképp nem lehet w mellett a bázisban.)

Megjegyzés. Az alterek dimenziótételének bizonyításából tudjuk, hogy $w, u_1, u_2, v_1, v_3, v_4$ bázisa az $U+V$ altérnek. Tehát $U+V$ hatdimenziós, és így $U+V = \mathbb{Z}_3^6$.

---

28. feladat. Tekintsük az $\mathbb{R}^5$ vektortérben az $U = [u_1, u_2, u_3]$ és $V = [v_1, v_2]$ altereket.

$$u_1 = (1,0,2,3,2),\ u_2 = (3,-1,5,4,1),\ u_3 = (2,1,0,1,-1), \qquad v_1 = (-2,3,0,1,1),\ v_2 = (4,1,3,0,1)$$

Igaz-e, hogy $\mathbb{R}^5 = U \oplus V$?

Megoldás. Először ellenőrizzük, hogy egyáltalán $\mathbb{R}^5 = U + V$ teljesül-e, vagyis az u_1, u_2, u_3, v_1, v_2 vektorok kifeszítik-e az $\mathbb{R}^5$ vektorteret. Ehhez sorvektorrokként egymás alá írjuk a vektorokat, és elemi sorátalakításokkal redukált lépcsős alakra hozzuk a mátrixot:

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 2 & 3 & 2 \\
3 & -1 & 5 & 4 & 1 \\
2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\
-2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\
4 & 1 & 3 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{pmatrix}
\boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1}
\end{pmatrix}
$$

Az elemi sorátalakítások nem változtatják meg a sorvektorok által kifeszített alteret, ezért az eredeti mátrix sorai ugyanazt az alteret generálják, mint a kapott egységmátrix sorai, tehát $U+V = [u_1, u_2, u_3, v_1, v_2] = \mathbb{R}^5$. Innen a megoldást többféleképpen lehet folytatni:

(a) A direkt összeg definíciója szerint ellenőrizni kellene, hogy $U \cap V = \{0\}$. A metszet kiszámításához fel kellene írnunk mindkét alteret homogén lineáris egyenletrendszer megoldástereként, majd a két egyenletrendszert egyesíteni, és az egysített egyenletrendszert megoldani. Ha elvégezzük a számolást, kiderül, hogy az egyesített egyenletrendszernek csak triviális megoldása van, ezért $U \cap V = \{0\}$, és így $\mathbb{R}^5 = U \oplus V$.

(b) A fenti elimináció során kiderült, hogy az u_1, u_2, u_3, v_1, v_2 vektorrendszer bázisa $\mathbb{R}^5$-nek. Ebből következik, hogy u_1, u_2, u_3 is lineárisan független, és így bázisa U-nak. Hasonlóan v_1, v_2 is lineárisan független, és így bázisa V-nek. Tehát U és V bázisának egyesítése bázisa az $\mathbb{R}^5 = U + V$ altérnek, ezért (a direkt összeg tulajdonság egyik ekvivalens átfogalmazása szerint) $\mathbb{R}^5 = U \oplus V$.

(c) Ha már a (b) részhez hasonlóan észrevettük a függetlenségeket és a bázisokat, akkor az alterek dimenziótételét használva is befejezhetjük a megoldást: $\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U+V) = 3 + 2 - 5 = 0$, ezért $U \cap V = \{0\}$.

---

29. feladat. Határozzuk meg az alábbi $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mátrix (oszlop)rangját, és adjunk meg $\mathrm{r}(A)$ darab oszlopvektort, amelyek lineárisan függetlenek.

$$
A = \begin{pmatrix}
1 & 2 & -1 & 0 \\
2 & 1 & 3 & 2 \\
-1 & -2 & 2 & 1 \\
2 & 1 & 4 & 3
\end{pmatrix}
$$

Megoldás. A mátrixot elemi sorátalakításokkal redukált lépcsős alakra hozva a következő mátrixot kapjuk:

$$
A' = \begin{pmatrix}
\boxed{1} & 0 & 0 & -1 \\
0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\
0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

Szemlátomást $\mathrm{r}(A') = 3$, és az A' mátrix első három oszlopa lineárisan független. Mivel az elemi sorátalakítások nem változtatják meg az oszlopok közötti lineáris összefüggéseket, ugyanez érvényes az eredeti mátrixra is. Tehát $\mathrm{r}(A) = 3$, és az A mátrix első három oszlopa lineárisan független.

---

30. feladat. Határozzuk meg az alábbi $A \in \mathbb{Z}_3^{5\times 4}$ mátrix (sor)rangját, és adjunk meg $\mathrm{r}(A)$ darab sorvektort, amelyek lineárisan függetlenek.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Megoldás. Elemi sorátalakítások nem változtatják meg a mátrix rangját, de a sorokat (a sorok közötti lineáris összefüggéseket) összekutyulhatják. Ezért most vagy elemi oszlopátalakításokat kell végeznünk, vagy a mátrix transzponáltján kell elemi sorátalakításokat végeznünk. Tegyük az utóbbit:

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad A' = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Látható, hogy $\mathrm{r}(A') = 3$, és az A' mátrix első, második és negyedik oszlopa lineárisan független. Ugyanez érvényes az A^{T} mátrixra is, az eredeti A mátrixról pedig ennek alapján azt mondhatjuk, hogy $\mathrm{r}(A) = 3$, és A első, második és negyedik sora lineárisan független.

---

31. feladat. Bontsa a valós függvények vektorterét két nemtriviális altér direkt összegére.

32. feladat. Mekkora lehet egy tízdimenziós térben egy nyolcdimenziós és egy kilencdimenziós altér metszetének dimenziója? Adjon konkrét példát az összes lehetséges értékre, a többiről meg bizonyítsa be, hogy valóban nem lehetséges.

33. feladat. Egy végesdimenziós vektortér A, B, C altereiről a következőket tudjuk: $A + B = A + C$, $A \cap B = A \cap C$ és $B \leq C$. Bizonyítsa be, hogy ekkor $B = C$.

34. feladat. Hány nemnulla determinánsú $n \times n$-es mátrix van $\mathbb{Z}_3$ felett?

35. feladat. Egy adott $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mátrixot szeretnénk két minél kisebb mátrix szorzatára felbontatni. Tekintsük az összes $A = BC$ alakú felbontást, ahol $B \in \mathbb{R}^{n\times k}$ és $C \in \mathbb{R}^{k\times m}$. Bizonyítsa be, hogy k lehetséges legkisebb értéke éppen $\mathrm{r}(A)$.

---

36. feladat. Melyek lineárisak az alábbi leképezések közül? Amelyik lineáris, annak határozzuk meg a képterét és a magterét (bázissal is és egyenletrendszerrel is), illetve ezek dimenzióját.

$$\begin{aligned} \varphi &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto\ (x + y, y + 1, x) \\ \psi &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto\ (x + y, xy) \\ \chi &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \mapsto\ (x - y, x + y) \\ \omega &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4,\ (x, y, z) \mapsto\ (x - y, y - z, x - z, z - x) \end{aligned}$$

Megoldás. Az világos, hogy φ nem lineáris, hiszen a nullvektort nem a nullvektorba viszi: $(0, 0)\varphi = (0, 1, 0)$. A ψ leképezés sem lineáris, mert pl. $u = (1, 1)$ és $v = (1, 2)$ esetén $u\psi + v\psi = (2, 1) + (3, 2) = (5, 3)$, míg $(u + v)\psi = (2, 3)\psi = (5, 6)$.
A χ leképezés lineáris, ami közvetlen számolással ellenőrizhető, vagy visszavezethető a mátrixszorzás megfelelő tulajdonságaira, hiszen (oszlopvektorokkal dolgozva):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \chi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

A $\operatorname{Ker}\chi$ altér azokból az (x, y, z) vektorokból áll, amelyekre $x - y = 0$ és $x + y = 0$, ez pedig csak $x = y = 0$ esetén lehetséges. Tehát $\operatorname{Ker}\chi = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} = [(0, 0, 1)]$, ami egydimenziós altér $\mathbb{R}^3$-ben. Az $\operatorname{Im}\chi$ altér az $(x - y, x + y) = x(1, 1) + y(-1, 1)$ alakú vektorokból áll. Tehát $\operatorname{Im}\chi = [(1, 1), (-1, 1)] = \mathbb{R}^2$ (miért?), ami kétdimenziós (al)tér. Figyeljük meg, hogy $\operatorname{Im}\chi$ éppen a fenti mátrix oszlopai által kifeszített altér $\mathbb{R}^2$-ben.
Az ω leképezés is lineáris, ami szintén közvetlen számolással ellenőrizhető, de következik az alábbi mátrixos felírásból is:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \omega = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

A $\mathrm{Ker}\,\omega$ altér azokból az (x, y, z) vektorokból áll, amelyekre $x - y = 0$, $y - z = 0$, $x - z = 0$ és $z - x = 0$, ez pedig akkor és csak akkor teljesül, ha $x = y = z$. Tehát $\mathrm{Ker}\,\omega = \{(x, x, x) : x \in \mathbb{R}\} = [(1, 1, 1)]$, ami egydimenziós altér $\mathbb{R}^3$-ben. Az $\mathrm{Im}\,\omega$ altér a fenti mátrix oszlopvektorai által generált altér: $\mathrm{Im}\,\omega = [(1, 0, 1, -1), (-1, 1, 0, 0), (0, -1, -1, 1)] = [(1, 0, 1, -1), (-1, 1, 0, 0)] = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : -x_4 = x_3 = x_1 + x_2\}$ (miért?), ami kétdimenziós altér $\mathbb{R}^4$-ben.

---

37. feladat. Határozzuk meg az alábbi lineáris leképezés magterét és képterét. Mindegyiket adjuk meg bázissal is, egyenletrendszerrel is, és elemeik felsorolásával is.

$$\varphi\colon \mathbb{Z}_3^4 \to \mathbb{Z}_3^3,\ (x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) \mapsto\ (x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4,\ x_1 + 2x_2 + x_3,\ 2x_2 + x_3 + x_4)$$

Megoldás. Ugyan a feladat nem kérte, de azért írjuk fel a leképezést mátrixszorzással:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \varphi \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Jelöljük a fenti mátrixot A-val.
A mag az alábbi homogén lineáris egyenletrendszer megoldástere:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

Vegyük észre, hogy ennek az egyenletrendszernek a mátrixa éppen A. Tehát az A mátrixot elemi sorátalakításokkal redukált lépcsős alakra hozva meg tudjuk oldani az egyenletrendszert:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Innen kiolvasható a megoldástér egy bázisa (0110, 1101), valamint az is, hogy elég lenne két egyenlet is három helyett (a redukált mátrix első két sora). Tehát a mag a következő kétdimenziós altér lesz $\mathbb{Z}_3^4$-ben:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\,\varphi &= \{(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) : x_1 + 2x_4 = 0,\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0\} = \\ &= [0110, 1101] = \{0000, 0110, 0220, 1101, 1211, 1021, 2202, 2012, 2122\} \leq \mathbb{Z}_3^4. \end{aligned}$$

A képtér az $(x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4,\ x_1 + 2x_2 + x_3,\ 2x_2 + x_3 + x_4) = x_1 \cdot 110 + x_2 \cdot 122 + x_3 \cdot 211 + x_4 \cdot 101$ alakú $\mathbb{Z}_3^3$-beli vektorokból áll, azaz $\mathrm{Im}\,\varphi = [110, 122, 211, 101]$. Figyeljük meg, hogy ezek a vektorok éppen a fenti A mátrix oszlopvektorai. Most azonban sorvektorokként kell egymás alá írnunk őket, hogy (redukált lépcsős alakra hozás után) megkapjuk $\mathrm{Im}\,\varphi$ egy bázisát és egyenletrendszeres felírását:

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Innen kiolvasható a képtér egyenletrendszeres felírása (a 211 vektornak megfelelő egyenlet), valamint az is, hogy elég két generátor is négy helyett (a redukált mátrix első két sora). Tehát a képtér a következő kétdimenziós altér lesz $\mathbb{Z}_3^3$-ban:

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\,\varphi &= \{(x_1,\, x_2,\, x_3) : 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\} = \\ &= [101, 012] = \{000, 101, 202, 012, 110, 211, 021, 122, 220\} \leq \mathbb{Z}_3^3. \end{aligned}$$

---

38. feladat. Legyen V a legfeljebb n-edfokú valós polinomok vektortere. Ellenőrizze, hogy a $\varphi\colon V \to V$, $f \mapsto f'$ leképezés lineáris, és határozza meg a képterét és a magterét. Adjon meg bázist a képtérben és a magtérben, és állapítsa meg, hogy hány dimenziósak. (Itt f' az f polinom deriváltját jelöli.)

39. feladat. Tekintsük $\mathbb{R}^2$-ben az $U = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ és $W = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ altereket. Adjon meg egy olyan $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ lineáris transzformációt, amelyre $\mathrm{Ker}\,\varphi = U$ és $\mathrm{Im}\,\varphi = W$. Adjon meg egy olyan ψ lineáris transzformációt is, amelyre $\mathrm{Ker}\,\psi = W$ és $\mathrm{Im}\,\psi = U$. (Képlettel írja le, hogy mit rendel φ, illetve ψ egy tetszőleges (x, y) vektorhoz.)

40. feladat. Legyen V egy kétdimenziós vektortér, és $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, V)$ egy lineáris transzformáció, amelyre $\varphi^2 = \varphi$. Bizonyítsa be, hogy léteznek olyan $K, I \leq V$ alterek, amelyekre $K \cap I = \{0\}$ és $K + I = V$ (azaz $V = K \oplus I$), továbbá tetszőleges $u \in K, w \in I$ esetén $(u + w)\varphi = w$. (Ilyenkor φ-t projekciónak (vetítésnek) nevezzük. Vajon miért?)

41. feladat. Legyen V egy kétdimenziós vektortér, és $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, V)$ egy lineáris transzformáció. Bizonyítsa be, hogy ha $\varphi^3 = \mathbf{0}$, akkor $\varphi^2 = \mathbf{0}$. (Itt $\mathbf{0}$ az azonosan nulla lineáris transzformációt jelöli, amely minden V-beli vektorhoz a nullvektort rendeli.)

---

42. feladat. Legyen $\mathcal{P}_3$ a legfeljebb harmadfokú valós polinomok vektortere, és tekintsük ebben a vektortérben az $\mathcal{A} = \{1, x, x^2, x^3\}$ bázist. Hasonlóképpen, legyen $\mathcal{P}_2$ a legfeljebb másodfokú valós polinomok vektortere a $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ bázissal. Határozzuk meg a $\varphi\colon \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_2,\ f \mapsto f'$ lineáris leképezés mátrixát az $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ bázispárban.

Megoldás. Számítsuk ki az $\mathcal{A}$ bázis elemeinek képeit, és a képek koordinátáit a $\mathcal{B}$ bázisban:

$$\begin{aligned}
1\varphi &= 0 &&= 0\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 &&\Longrightarrow && [\![1\varphi]\!]_{\mathcal{B}} = (0,0,0)\\
x\varphi &= 1 &&= 1\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 &&\Longrightarrow && [\![x\varphi]\!]_{\mathcal{B}} = (1,0,0)\\
x^2\varphi &= 2x &&= 0\cdot 1 + 2\cdot x + 0\cdot x^2 &&\Longrightarrow && [\![x^2\varphi]\!]_{\mathcal{B}} = (0,2,0)\\
x^3\varphi &= 3x^2 &&= 0\cdot 1 + 0\cdot x + 3\cdot x^2 &&\Longrightarrow && [\![x^3\varphi]\!]_{\mathcal{B}} = (0,0,3)
\end{aligned}$$

A koordinátasorokat egymás alá írva kapjuk φ mátrixát az $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ bázispárban:

$$[\![\varphi]\!]_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ellenőrzésképpen nézzük meg, hogy az $f = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$ polinom koordinátasorából valóban az $f' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2$ polinom koordinátasorát kapjuk-e a $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ mátrixszal való szorzáskor:

$$(c_0, c_1, c_2, c_3) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = (c_1, 2c_2, 3c_3). \checkmark$$

Megjegyzés. Ha oszlopvektorokkal szeretnénk dolgozni, akkor az $[\![1\varphi]\!]_{\mathcal{B}}$, $[\![x\varphi]\!]_{\mathcal{B}}$, $[\![x^2\varphi]\!]_{\mathcal{B}}$, $[\![x^3\varphi]\!]_{\mathcal{B}}$ koordinátasorokat oszlopokként egymás mellé kell írnunk:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Az így kapott mátrix a fenti $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ mátrix transzponáltja (ez mindig így van).

---

43. feladat. Írjuk fel az $y = 2x$ egyenletű egyenesre való tükrözésnek (mint $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformációnak) a mátrixát az $\mathcal{F} = \{f_1, f_2\}$ bázisban, majd az $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ bázisban is, ahol

$$\begin{aligned} f_1 &= (1,2), & f_2 &= (-2,1);\\ e_1 &= (1,0), & e_2 &= (0,1). \end{aligned}$$

Megoldás. Számítsuk ki az $\mathcal{F}$ bázis elemeinek képeit, és a képek koordinátáit az $\mathcal{F}$ bázisban. Mivel f_1 a tükrözés tengelyére esik, f_2 pedig merőleges a tengelyre, nem nehéz meghatározni a tükörképeiket:

$$\begin{aligned}
f_1\varphi &= f_1 &&= 1\, f_1 + 0\, f_2 &&\Longrightarrow && [\![f_1\varphi]\!]_{\mathcal{F}} = (1,0)\\
f_2\varphi &= -f_2 &&= 0\, f_1 + (-1)\, f_2 &&\Longrightarrow && [\![f_2\varphi]\!]_{\mathcal{F}} = (0,-1)
\end{aligned}$$

A koordinátasorokat egymás alá írva kapjuk φ mátrixát az $\mathcal{F}, \mathcal{F}$ bázispárban:

$$[\![\varphi]\!]_{\mathcal{F}} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{F},\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{E},\mathcal{E}}$ mátrix felírásához az $e_1\varphi$ és $e_2\varphi$ vektorokat kell meghatároznunk. Ehhez hasznos lesz kifejezni az e_1, e_2 vektorokat f_1, f_2 segítségével (hiszen az utóbbiak képeit már ismerjük). Ez két kis könnyű egyenletrendszer megoldását jelenti; a számolást mellőzzük, íme az eredmény:

$$e_1 = \frac{1}{5}f_1 - \frac{2}{5}f_2, \quad e_2 = \frac{2}{5}f_1 + \frac{1}{5}f_2.$$

Ennek alapján ki tudjuk számolni az $[\![e_1\varphi]\!]_{\mathcal{E}}$ és $[\![e_2\varphi]\!]_{\mathcal{E}}$ koordinátasorokat:

$$\begin{aligned}
e_1\varphi &= \tfrac{1}{5}f_1\varphi - \tfrac{2}{5}f_2\varphi = \tfrac{1}{5}f_1 + \tfrac{2}{5}f_2 = (-3/5, 4/5) = -\tfrac{3}{5}\,e_1 + \tfrac{4}{5}\,e_2 \Longrightarrow [\![e_1\varphi]\!]_{\mathcal{E}} = (-3/5, 4/5)\\
e_2\varphi &= \tfrac{2}{5}f_1\varphi + \tfrac{1}{5}f_2\varphi = \tfrac{2}{5}f_1 - \tfrac{1}{5}f_2 = (4/5, 3/5) = \tfrac{4}{5}\,e_1 + \tfrac{3}{5}\,e_2 \Longrightarrow [\![e_2\varphi]\!]_{\mathcal{E}} = (4/5, 3/5)
\end{aligned}$$

A koordinátasorokat egymás alá írva kapjuk φ mátrixát az $\mathcal{E}, \mathcal{E}$ bázispárban:

$$[\![\varphi]\!]_{\mathcal{E}} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5\\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Így kapunk egy képletet tetszőleges (x,y) pont tükörképének koordinátáira:

$$(x,y)\varphi = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5\\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} = \left(-\tfrac{3}{5}x + \tfrac{4}{5}y,\ \tfrac{4}{5}x + \tfrac{3}{5}y\right).$$

Megjegyzés. Ha oszlopvektorokkal szeretnénk dolgozni, akkor a koordinátasorokat oszlopokként kellene egymás mellé írni:

$$\begin{pmatrix} -3/5 & 4/5\\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

A két mátrix „véletlenül” ugyanaz, de a színek jelzik, hogy másképpen vannak elrendezve a bázisvektorok képeinek koordinátái. Az előző feladatban láttunk olyan példát, ahol leképezés „soros” és „oszlopos” mátrixa nem ugyanaz (még a méretük sem egyforma).

---

44. feladat. Írjuk fel az $y = 2x$ egyenletű egyenesre való merőleges vetítésnek (mint $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformációnak) a mátrixát az $\mathcal{F} = \{f_1, f_2\}$ bázisban, majd az $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ bázisban is, ahol

$$\begin{aligned} f_1 &= (1,2), \quad f_2 = (-2,1); \\ e_1 &= (1,0), \quad e_2 = (0,1). \end{aligned}$$

Megoldás. Számítsuk ki az $\mathcal{F}$ bázis elemeinek képeit, és a képek koordinátáit az $\mathcal{F}$ bázisban. Az előző feladathoz hasonlóan ez könnyű, mert az $\mathcal{F}$ bázis „jó helyzetben” van:

$$\begin{aligned} f_1\varphi &= f_1 = 1\,f_1 + 0\,f_2 \implies [\![f_1\varphi]\!]_{\mathcal{F}} = (1,0) \\ f_2\varphi &= \ \ 0 \ \ = 0\,f_1 + 0\,f_2 \implies [\![f_2\varphi]\!]_{\mathcal{F}} = (0,0) \end{aligned}$$

A koordinátasorokat egymás alá írva kapjuk φ mátrixát az $\mathcal{F},\mathcal{F}$ bázispárban:

$$[\![\varphi]\!]_{\mathcal{F}} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{F},\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{E},\mathcal{E}}$ mátrix felírásához használjuk az $e_1\varphi$ és $e_2\varphi$ vektorok f_1, f_2 segítségével való felírását, amit az előző feladatban kiszámoltunk.

$$\begin{aligned} e_1\varphi &= \tfrac{1}{5}f_1\varphi - \tfrac{2}{5}f_2\varphi = \tfrac{1}{5}f_1 + 0f_2 = (1/5, 2/5) = \tfrac{1}{5}\,e_1 + \tfrac{2}{5}\,e_2 \implies [\![e_1\varphi]\!]_{\mathcal{E}} = (1/5, 2/5) \\ e_2\varphi &= \tfrac{2}{5}f_1\varphi + \tfrac{1}{5}f_2\varphi = \tfrac{2}{5}f_1 + 0f_2 = (2/5, 4/5) = \tfrac{2}{5}\,e_1 + \tfrac{4}{5}\,e_2 \implies [\![e_2\varphi]\!]_{\mathcal{E}} = (2/5, 4/5) \end{aligned}$$

A koordinátasorokat egymás alá írva kapjuk φ mátrixát az $\mathcal{E},\mathcal{E}$ bázispárban:

$$[\![\varphi]\!]_{\mathcal{E}} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{pmatrix}.$$

Így kapunk egy képletet tetszőleges (x,y) pont vetületének koordinátáira:

$$(x,y)\varphi = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{pmatrix} = \left(\tfrac{1}{5}x + \tfrac{2}{5}y,\ \tfrac{2}{5}x + \tfrac{4}{5}y\right).$$

---

45. feladat. Határozzuk meg az alábbi φ lineáris transzformáció mátrixát $\mathbb{R}^3$ standard $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ bázisában.

$$\begin{aligned} &\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto (2x - y,\ x + z,\ 3x - 2y - z) \\ &e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1) \end{aligned}$$

Megoldás. Először a bázisvektorok képeinek koordinátáit kell meghatározni. A standard bázisban könnyű számolni:

$$\begin{aligned} e_1\varphi &= (2,1,3) = 2\,e_1 + 1\,e_2 + 3\,e_3 \implies [\![e_1\varphi]\!]_{\mathcal{E}} = (2,1,3) \\ e_2\varphi &= (-1,0,-2) = (-1)\,e_1 + 0\,e_2 + (-2)\,e_3 \implies [\![e_2\varphi]\!]_{\mathcal{E}} = (-1,0,-2) \\ e_3\varphi &= (0,1,-1) = 0\,e_1 + 1\,e_2 + (-1)\,e_3 \implies [\![e_3\varphi]\!]_{\mathcal{E}} = (0,1,-1) \end{aligned}$$

A koordinátasorokat sorokként egymás alá írva kapjuk φ mátrixát az $\mathcal{E}$ bázisban:

$$[\![\varphi]\!]_{\mathcal{E}} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ellenőrzésképpen írjuk fel a fenti mátrixhoz tartozó mátrixleképezést, hogy tényleg φ jön-e ki:

$$(x,y,z) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (2x - y,\ x + z,\ 3x - 2y - z) = (x,y,z)\varphi. \quad \checkmark$$

Megjegyzés. Ha oszlopvektorokkal szeretnénk dolgozni, akkor az $[\![e_1\varphi]\!]_{\mathcal{E}}$, $[\![e_2\varphi]\!]_{\mathcal{E}}$, $[\![e_3\varphi]\!]_{\mathcal{E}}$ koordinátasorokat oszlopokként egymás mellé kell írnunk:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -y & \\ x & & +z \\ 3x & -2y & -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \varphi. \quad \checkmark$$

---

46. feladat. Határozzuk meg az előző feladatbeli φ lineáris transzformáció mátrixát az $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3\}$ bázisban.

$$f_1 = (2,0,0),\ f_2 = (0,1,1),\ f_3 = (0,1,-1)$$

Megoldás. Ebben a bázisban már számolni kell ahhoz, hogy megkapjuk a bázisvektorok képeinek koordinátáit; ezt nem részletezzük, csak a végeredményt adjuk meg:

$$\begin{aligned} f_1\varphi &= (4,2,6) = 2\,f_1 + 4\,f_2 + (-2)\,f_3 \implies [\![f_1\varphi]\!]_{\mathcal{F}} = (2,4,-2) \\ f_2\varphi &= (-1,1,-3) = (-1/2)\,f_1 + (-1)\,f_2 + 2\,f_3 \implies [\![f_2\varphi]\!]_{\mathcal{F}} = (-1/2,-1,2) \\ f_3\varphi &= (-1,-1,-1) = (-1/2)\,f_1 + (-1)\,f_2 + 0\,f_3 \implies [\![f_3\varphi]\!]_{\mathcal{F}} = (-1/2,-1,0) \end{aligned}$$

A koordinátasorokat sorokként egymás alá írva kapjuk φ mátrixát az $\mathcal{F}$ bázisban:

$$[\![\varphi]\!]_{\mathcal{F}} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{F},\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1/2 & -1 & 2 \\ -1/2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

---

47. feladat. Határozzuk meg az $[\![\mathcal{E} \to \mathcal{F}]\!]$ és $[\![\mathcal{F} \to \mathcal{E}]\!]$ bázisáttérés-mátrixokat, ahol $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ és $\mathcal{F} = \{f_1, f_2\}$ az alábbi bázisai az $\mathbb{R}^2$ vektortérnek:

$$e_1 = (1,0),\ e_2 = (0,1) \qquad f_1 = (1,2),\ f_2 = (-2,1).$$

Megoldás. Az $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ bázisáttéréshez ki kell fejeznünk $\mathcal{E}$ elemeit $\mathcal{F}$ elemeiből (ezt a 43. feladatban már megtettük):

$$\begin{aligned} e_1 &= \tfrac{1}{5}\, f_1 + \left(-\tfrac{2}{5}\right) f_2 &&\Longrightarrow [\![e_1]\!]_{\mathcal{F}} = (1/5, -2/5) \\ e_2 &= \tfrac{2}{5}\, f_1 + \tfrac{1}{5}\, f_2 &&\Longrightarrow [\![e_2]\!]_{\mathcal{F}} = (2/5, 1/5) \end{aligned}$$

A koordinátasorokat egymás alá írva kapjuk az $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ bázisáttérés mátrixát:

$$[\![\mathcal{E} \to \mathcal{F}]\!] = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Az $\mathcal{F} \to \mathcal{E}$ bázisáttéréshez nem is kell számolni:

$$\begin{aligned} f_1 &= 1\, e_1 + 2\, e_2 &&\Longrightarrow [\![f_1]\!]_{\mathcal{E}} = (1, 2) \\ f_2 &= -2\, e_1 + 1\, e_2 &&\Longrightarrow [\![f_2]\!]_{\mathcal{E}} = (-2, 1) \end{aligned}$$

A koordinátasorokat egymás alá írva kapjuk az $\mathcal{F} \to \mathcal{E}$ bázisáttérés mátrixát:

$$[\![\mathcal{F} \to \mathcal{E}]\!] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Megjegyzés. A két bázisáttérés-mátrix egymás inverze (ez mindig így van). Ezért az $[\![\mathcal{E} \to \mathcal{F}]\!]$ mátrixot megkaphattuk volna a könnyen felírt $[\![\mathcal{F} \to \mathcal{E}]\!]$ mátrix inverzeként is. A 43. feladatban a $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{F}}$ mátrixot könnyű volt felírni; ebből megkaphattuk volna a $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{E}}$ mátrixot a bázisáttérés-mátrixszal való konjugálással:

$$\begin{aligned} [\![\varphi]\!]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = [\![\mathcal{F} \to \mathcal{E}]\!]^{-1} \cdot [\![\varphi]\!]_{\mathcal{F},\mathcal{F}} \cdot [\![\mathcal{F} \to \mathcal{E}]\!] &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

---

48. feladat. Határozzuk meg az alábbi A mátrix sajátértékeit, adjunk meg bázist mindegyik sajátaltérben (sorvektorokkal), és hozzuk a mátrixot diagonális alakra.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{3\times 3}$$

Megoldás. A sajátértékek meghatározásához írjuk fel a karakterisztikus polinomot:

$$\begin{vmatrix} -x & 2 & 1 \\ 2 & -x & 1 \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = -(x-1)^2(x-2).$$

Tehát két sajátérték van: $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = 2$.
A $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátaltér a $v(A - \lambda_1 E) = 0$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldástere. Mivel sorvektorokkal dolgozunk, az egyenleteket „függőlegesen” kellene kiolvasni a mátrixból. Ezért transzponáljuk a mátrixot, hogy a szokásos sorátalakításokkal dolgozhassunk:

$$A - \lambda_1 E = A - E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (A - \lambda_1 E)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ez utóbbi mátrixot hozzuk elemi sorátalakításokkal redukált lépcsős alakra, majd abból kiolvassuk a megoldástér egy bázisát:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad U_1 = [210,\, 001].$$

Az $A - \lambda_2 E$ mátrixot is transzponáljuk:

$$A - \lambda_2 E = A - 2E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (A - \lambda_2 E)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Elemi sorátalakításokkal redukált lépcsős alakra hozzuk, majd kiolvassuk a sajátaltér egy bázisát:

$$\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\1&1&2\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}\boxed{1}&0&1\\0&\boxed{1}&1\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad\Longrightarrow\qquad U_2=[221].$$

A különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok mindig lineárisan függetlenek, tehát $f_1 = 210$, $f_2 = 001$, $f_3 = 221$ lineárisan független vektorrendszer a $\mathbb{Z}_3^3$ vektortérben. Szerencsénk van: a vektorterünk csak háromdimenziós, ezért az $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3\}$ vektorrendszer bázis, így az A mátrix diagonalizálható (hasonló egy diagonális mátrixhoz). A mátrix diagonalizálásához tekintsük a $\varphi\colon \mathbb{Z}_3^3 \to \mathbb{Z}_3^3$, $v \mapsto vA$ lineáris leképezést. Ennek mátrixa a standard $\mathcal{E}$ bázisban éppen A, az $\mathcal{F}$ sajátbázisban pedig diagonális mátrix lesz. Az $[\![\mathcal{F} \to \mathcal{E}]\!]$ mátrixot egyszerűen az f_1, f_2, f_3 vektorokat egymás alá írva kapjuk, az $[\![\mathcal{E} \to \mathcal{F}]\!]$ mátrix pedig ennek inverze:

$$[\![\mathcal{F}\to\mathcal{E}]\!] = \begin{pmatrix}2&1&0\\0&0&1\\2&2&1\end{pmatrix}, \qquad [\![\mathcal{E}\to\mathcal{F}]\!] = \begin{pmatrix}2&1&0\\0&0&1\\2&2&1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1&2&1\\2&2&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Ezek segítségével így hozható diagonális alakra az A mátrix:

$$[\![\varphi]\!]_{\mathcal{F}} = [\![\mathcal{F}\to\mathcal{E}]\!]\cdot[\![\varphi]\!]_{\mathcal{E}}\cdot[\![\mathcal{E}\to\mathcal{F}]\!] = \begin{pmatrix}2&1&0\\0&0&1\\2&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&2&1\\2&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&1\\2&2&1\\0&1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

Tehát a $P = \left(\begin{smallmatrix}1&2&1\\2&2&1\\0&1&0\end{smallmatrix}\right)$ mátrixszal $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(1,1,2)$.

---

49. feladat. Legyen V egy kétdimenziós vektortér és $\varphi\colon V \to V$ nem azonosan nulla lineáris transzformáció. Bizonyítsa be, hogy ha $\varphi^2 = 0$, akkor van V-nek olyan $\mathcal{B}$ bázisa, amelyre

$$[\![\varphi]\!]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}.$$

50. feladat. Tegyük fel, hogy u és v is sajátvektora a $\varphi \in \operatorname{Hom}(V,V)$ lineáris transzformációnak (mondjuk λ és μ sajátértékekkel). Mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy $u+v$ is sajátvektor legyen?

51. feladat. Határozza meg az alábbi A mátrix sajátértékeit, adjon meg egy sajátbázist (sorvektorokkal!), majd ennek segítségével adjon meg olyan $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ nemelfajuló mátrixot, amelyre $P^{-1}AP$ diagonális mátrix.

$$A = \begin{pmatrix}0,9&0,1\\0,5&0,5\end{pmatrix}$$

Bónusz kérdések: mi lesz a $\lim_{n\to\infty} A^n$ határérték? Mit jelent mindez az alábbi egyszerű időjárási modellben?

- Ha ma szép idő van, akkor 90% valószínűséggel holnap is az lesz, és 10% valószínűséggel elromlik az idő holnapra.
- Ha ma rossz idő van, akkor 50% valószínűséggel holnap is az lesz, és 50% valószínűséggel kiderül az idő holnapra.

52. feladat. Legyen $\varphi \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ az $[(1,1,-1)]$ egyenes körüli 180 fokos forgatás. Írja fel a φ transzformáció mátrixát először az $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3\}$ bázisban, majd – bázisáttérést használva – az $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ bázisban is, ahol

$$\begin{aligned} f_1 &= (1,1,-1), & e_1 &= (1,0,0),\\ f_2 &= (-2,3,1), & e_2 &= (0,1,0),\\ f_3 &= (1,-1,0), & e_3 &= (0,0,1). \end{aligned}$$

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy épp az f_1 vektor egyenese körül forgatunk, továbbá f_2 és f_3 merőleges erre az egyenesre. Ezért a $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{F}}$ mátrixot könnyű felírni. A bázisátmenetnél az inverzmátrix és a mátrixszorzat kiszámolásához szabad számítógépet használni.

---

53. feladat. Határozzuk meg az alábbi A mátrix sajátértékeit, minden sajátérték algebrai és geometriai multiplicitását, és diagonalizáljuk a mátrixot, amennyire lehet:

$$A = \begin{pmatrix}2&0&2&1\\0&0&2&1\\0&1&0&2\\0&1&1&1\end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{4\times 4}.$$

Megoldás. Először számítsuk ki a karakterisztikus polinomot (érdemes az első oszlop szerint kifejteni, mert akkor mindjárt ki lesz emelve egy gyöktényező):

$$p_A = \begin{vmatrix}2-x&0&2&1\\0&-x&2&1\\0&1&-x&2\\0&1&1&1-x\end{vmatrix} = (2-x)(2x^3+x^2+2x) = (x-2)x(x^2+2x+1) = (x-2)x(x+1)^2 = x(x-2)^3.$$

Tehát két sajátérték van: $\lambda_1 = 0$ (algebrai multiplicitása: $a_1 = 1$), illetve $\lambda_2 = 2$ (algebrai multiplicitása: $a_2 = 3$).

Most keressünk bázist mindkét sajátaltérben. Ehhez az $(A-\lambda E)^{\mathrm{T}}$ mátrixú homogén lineáris egyenletrendszert kell megoldanunk mindkét sajátértékre:

$$(A-\lambda_1 E)^{\mathrm{T}} = \quad A^{\mathrm{T}} \quad = \begin{pmatrix} 2&0&0&0\\ 0&0&1&1\\ 2&2&0&1\\ 1&1&2&1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \boxed{1}&0&0&0\\ 0&\boxed{1}&0&2\\ 0&0&\boxed{1}&1\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \implies S_0=[0121]$$

$$(A-\lambda_2 E)^{\mathrm{T}} = (A-2E)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&1&1&1\\ 2&2&1&1\\ 1&1&2&2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \boxed{1}&0&1&1\\ 0&\boxed{1}&1&1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \implies S_2=[2210, 2201]$$

Foglaljuk össze az eddigieket. Két sajátérték van:

- $\lambda_1=0$, algebrai multiplicitása $a_1=1$, geometriai multiplicitása $g_1=1$;
- $\lambda_2=2$, algebrai multiplicitása $a_2=3$, geometriai multiplicitása $g_2=2$.

Mivel a geometriai multiplicitások összege kisebb, mint 4, a mátrix nem diagonalizálható. A legtöbb, amit tehetünk, hogy a sajátalterekben talált bázisok egyesítését kibővítjük $\mathbb{Z}_3^4$ egy $\mathcal{B}$ bázisává (a 20. feladat módszerével):

$$b_1=0121, \quad b_2=2210, \quad b_3=2201, \quad b_4=1000.$$

Tekintsük a $\varphi\colon \mathbb{Z}_3^4\to\mathbb{Z}_3^4$, $v\mapsto vA$ lineáris transzformációt. Ennek mátrixa a standard $\mathcal{E}$ bázisban éppen A. Térjünk át erről a $\mathcal{B}$ bázisra:

$$[\![\mathcal{B}\to\mathcal{E}]\!] = Q = \begin{pmatrix} 0&1&2&1\\ 2&2&1&0\\ 2&2&0&1\\ 1&0&0&0 \end{pmatrix}, \qquad [\![\mathcal{E}\to\mathcal{B}]\!] = Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\ 1&1&2&0\\ 1&2&2&1\\ 1&1&0&1 \end{pmatrix}.$$

A φ lineáris transzformáció mátrixa a $\mathcal{B}$ bázisban „majdnem” diagonális:

$$[\![\varphi]\!]_{\mathcal{B}} = [\![\mathcal{B}\to\mathcal{E}]\!]\cdot[\![\varphi]\!]_{\mathcal{E}}\cdot[\![\mathcal{E}\to\mathcal{B}]\!] = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&2&0&0\\ 0&0&2&0\\ 0&2&1&2 \end{pmatrix}.$$

A diagonális részben minden sajátérték annyiszor lép fel, amennyi a geometriai multiplicitása. Mivel a kapott mátrix trianguláris, könnyen leolvasható a karakterisztikus polinomja, a sajátértékei, és ezek algebrai multiplicitásai. Ezek természetesen ugyanazok, mint az eredeti A mátrixnál, hiszen a két mátrix hasonló.

Megjegyzés. Ha elrontottuk volna a sajátalterekben talált bázisok egyesítésének kibővítését az egész tér bázisává (azaz b_4 nem lenne független a b_1, b_2, b_3 vektoroktól), akkor a $[\![\mathcal{B}\to\mathcal{E}]\!]$ mátrixnak nem lenne inverze. Tehát a 20. feladat (hosszadalmas) módszere helyett megtehetjük azt, hogy „érzésből” választunk egy b_4 vektort, és a mátrixinvertálással mutatjuk meg, hogy jó volt a megérzésünk. Ha tényleg jó volt, akkor ezzel megtakarítottunk némi munkát (az inverz kiszámítását úgysem úszhatjuk meg). Ha nem volt jó a megérzésünk, akkor viszont egy másik b_4 vektorral kell próbálkozni.

---

54. feladat. Határozzuk meg az alábbi A mátrix sajátértékeit, minden sajátérték algebrai és geometriai multiplicitását, és diagonalizáljuk a mátrixot, amennyire lehet:

$$A = \begin{pmatrix} 10&-12&-5\\ 4&-3&-2\\ 11&-18&-4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Megoldás. Először számítsuk ki a karakterisztikus polinomot:

$$p_A = \begin{vmatrix} 10-x&-12&-5\\ 4&-3-x&-2\\ 11&-18&-4-x \end{vmatrix} = -x^3+3x^2-9x+27 = -(x-3)(x^2+9).$$

Tehát csak egy sajátérték van: $\lambda=3$, algebrai multiplicitása: 1, és így a geometriai multiplicitása is csak 1 lehet. Ezért a mátrix nem diagonalizálható. De azért keressünk bázist az S_3 sajátaltérben:

$$(A-\lambda E)^{\mathrm{T}} = (A-3E)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 7&4&11\\ -12&-6&-18\\ -5&-2&-7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \boxed{1}&0&1\\ 0&\boxed{1}&1\\ 0&0&0 \end{pmatrix} \implies S_3=[(-1,-1,1)].$$

Bővítsük ezt az egyetlen sajátvektort $\mathbb{R}^3$ bázisává:

$$b_1=(-1,-1,1), \quad b_2=(1,0,0), \quad b_3=(0,1,0).$$

Tekintsük a $\varphi\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $v\mapsto vA$ lineáris transzformációt. Ennek mátrixa a standard $\mathcal{E}$ bázisban éppen A. Térjünk át erről a $\mathcal{B}=\{b_1,b_2,b_3\}$ bázisra:

$$[\![\mathcal{B}\to\mathcal{E}]\!] = Q = \begin{pmatrix} -1&-1&1\\ 1&0&0\\ 0&1&0 \end{pmatrix}, \qquad [\![\mathcal{E}\to\mathcal{B}]\!] = Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0&1&0\\ 0&0&1\\ 1&1&1 \end{pmatrix}.$$

A φ lineáris transzformáció mátrixa a $\mathcal{B}$ bázisban:

$$[\![\varphi]\!]_{\mathcal{B}} = [\![\mathcal{B} \to \mathcal{E}]\!] \cdot [\![\varphi]\!]_{\mathcal{E}} \cdot [\![\mathcal{E} \to \mathcal{B}]\!] = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & -17 \\ -2 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Ez a mátrix sajnos nem sokkal szebb, mint az eredeti A mátrix, de „vigasztalásképp” lásd az 56. feladatot.

---

55. feladat. Tekintsük az előző feladatbeli mátrixot a komplex számtest felett, azaz vizsgáljuk a $\psi\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $v \mapsto vA$ lineáris transzformációt. Diagonalizálható-e ez a transzformáció? Ha igen, akkor adjunk meg egy sajátbázist.

Megoldás. A karakterisztikus polinom $\mathbb{C}$ felett már persze elsőfokú tényezőkre bomlik:

$$p_A = -x^3 + 3x^2 - 9x + 27 = -(x-3)(x-3i)(x+3i).$$

Tehát három sajátérték van: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 3i$, és $\lambda_3 = -3i$. Mindegyiknek 1 az algebrai multiplicitása, és így a geometriai multiplicitásuk is 1. A geometriai multiplicitások összege 3, ezért az A mátrix $\mathbb{C}$ felett már diagonalizálható. Az S_3 sajátaltérben már meghatároztunk egy bázist, így most már csak az S_{3i} és S_{-3i} sajátalterekkel kell foglalkoznunk:

$$(A - \lambda_2 E)^{\mathrm{T}} = (A - 3iE)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 10-3i & 4 & 11 \\ -12 & -3-3i & -18 \\ -5 & -2 & -4-3i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2+i \\ 0 & \boxed{1} & -3-i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies S_{3i} = (-2-i,\, 3+i,\, 1)$$

$$(A - \lambda_3 E)^{\mathrm{T}} = (A + 3iE)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 10+3i & 4 & 11 \\ -12 & -3+3i & -18 \\ -5 & -2 & -4+3i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2-i \\ 0 & \boxed{1} & -3+i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies S_{-3i} = (-2+i,\, 3-i,\, 1)$$

Ezzel meg is van a $\mathcal{B}$ sajátbázis:

$$b_1 = (-1, -1, 1), \quad b_2 = (-2-i, 3+i, 1), \quad b_3 = (-2+i, 3-i, 1).$$

Ha nem számoltunk el semmit, akkor ebben a bázisban ψ mátrixa diagonális: $[\![\psi]\!]_{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(3, 3i, -3i)$. Ellenőrzésképpen (és a móka kedvéért) végezzük el a bázisáttérést:

$$[\![\mathcal{B} \to \mathcal{E}]\!] = P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2-i & 3+i & 1 \\ -2+i & 3-i & 1 \end{pmatrix}, \qquad [\![\mathcal{E} \to \mathcal{B}]\!] = P^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1+4i & 1-4i \\ -2 & 1+i & 1-i \\ 2 & 2+5i & 2-5i \end{pmatrix}.$$

Tehát a ψ lineáris transzformáció mátrixa a $\mathcal{B}$ bázisban:

$$[\![\psi]\!]_{\mathcal{B}} = [\![\mathcal{B} \to \mathcal{E}]\!] \cdot [\![\psi]\!]_{\mathcal{E}} \cdot [\![\mathcal{E} \to \mathcal{B}]\!] = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3i & 0 \\ 0 & 0 & -3i \end{pmatrix}.$$

---

56. feladat. Adjon meg $\mathbb{R}^3$-ban egy olyan $\mathcal{F}$ bázist, amelyben az 54. feladatbeli φ lineáris transzformáció mátrixa ilyen szép:

$$[\![\varphi]\!]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Milyen geometriai transzformáció lehet ez? (Érdemes ezen a kérdésen elgondolkozni már a feladat megoldása előtt, mert adhat ötletet a megoldáshoz.) A megoldáshoz szabad számítógépet használni, ellenőrizni pedig mindenképp célszerű számítógéppel.

57. feladat. Tekintsük az alábbi mátrixszal megadott Markov-láncot:

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Adjon meg egy bázist a $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó sajátaltérben. Mekkora ennek a sajátértéknek a geometriai multiplicitása? Hány stacionárius eloszlás van? Hogyan lehet ezt a Markov-lánc gráfja alapján megmagyarázni? Nincs ez ellentmondásban a Perron–Frobenius-tétellel? A megoldáshoz szabad számítógépet használni, ellenőrizni pedig mindenképp célszerű számítógéppel.

58. feladat. Adjon meg egy olyan $A \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ mátrixot, melynek egyetlen sajátértéke $\lambda = 2$, és ennek a sajátértéknek az algebrai multiplicitása 7, a geometriai multiplicitása viszont csak 3.

---

59. feladat. Határozzuk meg az alábbi $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix minimálpolinomját:

$$A = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Mivel a 2×2-es mátrixok tere 4-dimenziós, az E, A, A^2, A^3, A^4 mátrixok között biztosan teljesül valamilyen nemtriviális lineáris összefüggés. Számítsuk ki a mátrixokat:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0,86 & 0,14 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0,844 & 0,156 \\ 0,78 & 0,22 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 0,8376 & 0,1624 \\ 0,812 & 0,188 \end{pmatrix}.$$

Írjuk oszlopvektorokként egymás mellé a mátrixokat, és végezzünk elemi sorátalakításokat, hogy redukált lépcsős alakot kapjunk:

$$\begin{array}{ccccc} E & A & A^2 & A^3 & A^4 \\ \hline 1 & 0,9 & 0,86 & 0,844 & 0,8376 \\ 0 & 0,1 & 0,14 & 0,156 & 0,1624 \\ 0 & 0,5 & 0,7 & 0,78 & 0,812 \\ 1 & 0,5 & 0,3 & 0,22 & 0,188 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccccc} \boxed{1} & 0 & -0,4 & -0,56 & -0,624 \\ 0 & \boxed{1} & 1,4 & 1,56 & 1,624 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Látható, hogy az első két oszlop (azaz E és A) lineárisan független, de a harmadik oszlop (azaz A^2) már kikombinálható ezekből: $A^2 = -0{,}4E + 1{,}4A$, vagyis $A^2 - 1{,}4A + 0{,}4E = 0$. Tehát az A mátrix minimálpolinomja: $m_A = x^2 - 1{,}4x + 0{,}4$.

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy $m_A = x^2 - \operatorname{tr}(A)x + \det(A) = p_A$, vagyis a minimálpolinom megegyezik a karakterisztikus polinommal (ez persze nem igaz minden mátrixra).

---

60. feladat. Határozzuk meg az alábbi $A \in \mathbb{Z}_3^{3\times 3}$ mátrix esetén a standard bázisvektorok rendjét, majd ennek segítségével A minimálpolinomját:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Mivel $\mathbb{Z}_3^3$ háromdimenziós vektortér, az e_1, e_1A, e_1A^2, e_1A^3 vektorok között biztosan teljesül valamilyen nemtriviális lineáris összefüggés. Írjuk oszlopvektorokként egymás mellé ezeket a vektorokat, és végezzünk elemi sorátalakításokat, hogy redukált lépcsős alakot kapjunk:

$$\begin{array}{cccc} e_1 & e_1A & e_1A^2 & e_1A^3 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{cccc} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Az első két oszlop lineárisan független, de a harmadik már kifejezhető belőlük (persze a negyedik is, de a lehető legkisebb fokú polinomot akkor kapjuk, ha az első olyan oszlopot vesszük, amely kifejezhető a tőle balra álló oszlopok lineáris kombinációjaként): $e_1A^2 = 2e_1 + 2e_1A$, vagyis $e_1(A^2 + A + E) = 0$. Tehát az e_1 vektor rendje: $o_A(e_1) = x^2 + x + 1$.
Ugyanígy járunk el az e_2 vektorral is:

$$\begin{array}{cccc} e_2 & e_2A & e_2A^2 & e_2A^3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Itt nem is kell redukálni, hiszen minden oszlop ugyanaz. Az „első” összefüggés: $e_2A = e_2$, vagyis $e_2(A - E) = 0$, tehát az e_2 vektor rendje: $o_A(e_2) = x - 1$.
Lássuk az e_3 vektort:

$$\begin{array}{cccc} e_3 & e_3A & e_3A^2 & e_3A^3 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{cccc} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Itt ugyanazt kaptuk, mint az e_1 vektornál: $o_A(e_3) = x^2 + x + 1$.
A minimálpolinom osztható minden vektor rendjével, ezért osztható az $o_A(e_1)$, $o_A(e_2)$, $o_A(e_3)$ polinomok legkisebb közös többszörösével. Mivel $\mathbb{Z}_3$ fölött $x - 1 \mid x^2 + x + 1$, a legkisebb közös többszörös maga $x^2 + x + 1$ lesz, ezért $x^2 + x + 1 \mid m_A$. Másrészt, az $A^2 + A + E$ mátrix már annullálja az e_1, e_2, e_3 vektorokat, így azok lineáris kombinációit is. Tehát $A^2 + A + E = 0$, ezért $m_A \mid x^2 + x + 1$. Ezzel beláttuk, hogy $m_A = x^2 + x + 1$.

Megjegyzés. A fenti számolásokból észrevehetjük, hogy $A^3 = E$, azaz A gyöke az $x^3 - 1$ polinomnak (némi számolással az is ellenőrizhető, hogy A karakterisztikus polinomja $p_A = 1 - x^3$). Ez a polinom többszöröse a minimálpolinomnak: $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$.

---

61. feladat. Tekintsük a legfeljebb n-edfokú valós polinomok V vektorterén a $\varphi\colon V \to V,\ f \mapsto f'$ lineáris transzformációt.

(a) (2 pont) Határozza meg φ karakterisztikus polinomját és minimálpolinomját.

(b) (2 pont) Mutassa meg, hogy nem lehet a V vektorteret nemtriviális módon két φ-re invariáns altér direkt összegére bontani.

62. feladat. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a csupa 1-esekből álló mátrix.

(a) (2 pont) Határozza meg A minimálpolinomját.

(b) (2 pont) Határozza meg A sajátértékeit, és a sajátértékek algebrai és geometriai multiplicitását.

63. feladat. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonális mátrix, amelyben a főátlón a nem feltétlenül különböző $a_1, \dots, a_n$ számok szerepelnek: $A = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n)$. Határozza meg A minimálpolinomját.

64. feladat. Tetszőleges $\pi \in S_n$ permutációra tekinthetjük a $\varphi_\pi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n,\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_{1\pi}, \dots, x_{n\pi})$ lineáris transzformációt. (Ennek mátrixa a standard bázisban úgynevezett permutációs mátrix.)

(a) (2 pont) Határozza meg a $\pi = (1\,2\,3)(4\,5) \in S_5$ permutáció esetén φ_π minimálpolinomját.

(b) (2 pont) Határozza meg a $\pi = (1\,2\,3) \in S_3$ permutáció esetén φ_π sajátértékeit, és adjon meg egy sajátbázist. (Figyelem: nem a valós, hanem a komplex számtest felett dolgozunk!)

(c) (2 pont) Általánosítsa a (b) feladatot: mutassa meg, hogy minden $\pi \in S_n$ permutáció esetén φ_π diagonalizálható. Mik lesznek a sajátértékek, és mi lesz az egyes sajátértékek multiplicitása?

---

65. feladat. Legyen A egy 2×2-es valós mátrix, és legyen J a Jordan-normálalakja. Figyelem: A valós mátrix, de J-ben (valamint az A-ról J-re való bázisátmenet mátrixában) nem biztos, hogy csak valós számok szerepelnek! Hányféle lehetőség van a J mátrixra, ha csak arra vagyunk kíváncsiak, hogy a sajátértékek között hány valós van, különbözőek-e a sajátértékek vagy sem, illetve, hogy hány Jordan-blokk van és mekkorák? Mindegyik esetre adjon egy konkrét példát, és vázolja, hogy a $v \mapsto vJ$ leképezés milyen geometriai transzformációja az $\mathbb{R}^2$ síknak, például mit csinál a macskával.

66. feladat. Vesézze ki az alábbi $A \in \mathbb{R}^{9\times 9}$ mátrixot, azaz határozza meg a sajátértékeit, a sajátértékek algebrai és geometriai multiplicitását, a mátrix karakterisztikus polinomját és minimálpolinomját (indoklással).

$$A = \begin{pmatrix} 2&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&2&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&2&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&2&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&2&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&3&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&3&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&3&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&3 \end{pmatrix}$$

67. feladat. Tekintsük az alábbi $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrixot:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda&1&0\\ 0&\lambda&1\\ 0&0&\lambda \end{pmatrix}.$$

(a) (2 pont) Határozza meg az A^n hatványt. (A megsejtett képletet természetesen bizonyítani is kell, pl. teljes indukcióval.)

(b) (2 pont) Határozza meg az $f(A)$ mátrixot tetszőleges $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ polinom esetén. (Ezt fel lehet írni elegánsan, úgy, hogy az f polinom együtthatói nem is szerepelnek a végeredményben. A végeredményhez elvezető számolásban persze valószínűleg nem lehet megúszni, hogy kiírjuk f együtthatóit.)

(c) (2 pont) Hogyan lehetne értelmezni az A mátrix szinuszát?

---

68. feladat. Hozzuk nemelfajuló lineáris helyettesítéssel kanonikus alakra az alábbi q kvadratikus alakot és állapítsuk meg a definitségi osztályát:

$$q = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Megoldás. Alakítsuk teljes négyzetté az x_1-et tartalmazó tagokat:

$$q = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3.$$

Vezessük be x_1 helyett a $z_1 = x_1 + 2x_2 + x_3$ új változót. Ez nemelfajuló helyettesítés, mert „vissza lehet csinálni”: $x_1 = z_1 - 2x_2 - x_3$.

$$q = z_1^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3.$$

Alakítsuk teljes négyzetté az x_2-t tartalmazó tagokat:

$$q = z_1^2 - 3\Big(x_2 + \frac{1}{3}x_3\Big)^2 + \frac{7}{3}x_3^2.$$

Vezessük be x_2 helyett a $z_2 = x_2 + \frac{1}{3}x_3$ új változót, és – csak a szépség kedvéért – nevezzük át x_3-at z_3-ra. Ez is nyilván nemelfajuló helyettesítés. Ezzel meg is kapjuk q egy kanonikus alakját:

$$q = z_1^2 - 3z_2^2 + \frac{7}{3}z_3^2.$$

Mivel pozitív és negatív együttható is szerepel, q pozitív és negatív értékeket is felvesz, tehát indefinit.

Ellenőrzés. Mindkét helyettesítés, amit elvégeztünk, nemelfajuló volt, ezért az „eredőjük” is az. Ellenőrzésképpen azért írjuk fel a helyettesítés mátrixát:

$$(z_1, z_2, z_3) = (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

A mátrix determinánsa 1, ezért a helyettesítés valóban nemelfajuló. Ellenőrizzük magát a kanonikus alakot is (lehet számítógéppel is):

$$z_1^2 - 3z_2^2 + \frac{7}{3}z_3^2 = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 3\Big(x_2 + \frac{1}{3}x_3\Big)^2 + \frac{7}{3}x_3^2 = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3. \checkmark$$

---

69. feladat. Hozzuk nemelfajuló lineáris helyettesítéssel kanonikus alakra az alábbi q kvadratikus alakot és állapítsuk meg a definitségi osztályát:

$$q = 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Megoldás. Először hozzunk létre négyzeteket a $4x_1x_2$ tagból:

$$q = (x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Vezessük be x_1 helyett az $y_1 = x_1 + x_2$, és x_2 helyett az $y_2 = x_1 - x_2$ új változókat. Ez nemelfajuló helyettesítés, mert „vissza lehet csinálni”: $x_1 = (y_1 + y_2)/2$ és $x_2 = (y_1 - y_2)/2$. Az utóbbi kifejezésekre szükségünk is van, hogy el tudjuk tüntetni az „idejétmúlt” x_1 és x_2 változókat:

$$q = y_1^2 - y_2^2 + 2(y_1 + y_2)x_3 + 2(y_1 - y_2)x_3 = y_1^2 - y_2^2 + 4y_1x_3.$$

Alakítsuk teljes négyzetté az y_1-et tartalmazó tagokat:

$$q = (y_1 + 2x_3)^2 - y_2^2 - 4x_3^2.$$

Vezessük be y_1 helyett a $z_1 = y_1 + 2x_3$ új változót, és – csak a szépség kedvéért – nevezzük át y_2-t z_2-re és x_3-at z_3-ra. (Ez is nyilván nemelfajuló helyettesítés.) Ezzel meg is kapjuk q egy kanonikus alakját:

$$q = z_1^2 - z_2^2 - 4z_3^2.$$

Mivel pozitív és negatív együttható is szerepel, q pozitív és negatív értékeket is felvesz, tehát indefinit.

Ellenőrzés. Mindkét helyettesítés, amit elvégeztünk, nemelfajuló volt, ezért az „eredőjük” is az. Ellenőrzésképpen azért írjuk fel a helyettesítés mátrixát. Ehhez először fejezzük ki a z_i változókat az eredeti x_i változókból:

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1 + 2x_3 = x_1 + x_2 + 2x_3 \\ z_2 &= y_2 = x_1 - x_2 \\ z_3 &= x_3 \end{aligned}$$

Ennek alapján a helyettesítés így írható le mátrixszorzásként:

$$(z_1, z_2, z_3) = (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A mátrix determinánsa -2, ezért a helyettesítés valóban nemelfajuló. Ellenőrizzük magát a kanonikus alakot is (lehet számítógéppel is):

$$z_1^2 - z_2^2 - 4z_3^2 = (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - (x_1 - x_2)^2 - 4x_3^2 = 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3. \checkmark$$

---

70. feladat. Egy $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix Jordan-normálalakja négyféle lehet:

(a) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, ahol λ valós szám;

(b) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, ahol λ és μ két különböző valós szám;

(c) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, ahol λ valós szám;

(d) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix}$, ahol λ nemvalós komplex szám.

Vizsgálja meg, hogy az egyes esetekben hogyan „bolyong” a síkon egy tetszőleges v vektor, ha iteráljuk rajta az A mátrixhoz tartozó lineáris leképezést, vagyis hogyan viselkedik a $v, vA, vA^2, \dots$ sorozat. Véges határértékhez konvergál? Periodikusan ismétlődik? Végtelenbe tart? Ha igen, milyen irányban, vagy milyen görbe mentén? A válasz függhet a v kezdőpont megválasztásától, és attól is, hogy a sajátértékek milyen előjelűek, és mekkora az abszolút értékük (1-nél nagyobb, vagy kisebb, vagy éppen 1). Az (a) eset triviális (ugye?), azzal nem kell foglalkozni; a (b), (c) és (d) esetek külön-külön 2-2 pontot érnek. Ezen a linken lehet GeoGebrában kísérletezni: https://www.geogebra.org/m/kd8esmzm

71. feladat. Hozza nemelfajuló lineáris helyettesítéssel kanonikus alakra az alábbi q kvadratikus alakot és állapítsa meg a definitségi osztályát:

$$q = 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_1x_4 + 4x_2x_3 + 4x_2x_4 + 4x_3x_4.$$

Írja fel a helyettesítés mátrixát, és ellenőrizze a számolást (számítógéppel), úgy, ahogy a 68 és 69 feladatokban tettük. (Sok megoldás van, egyik szebb, mint a másik; érdemes az egyikre utazni…)

72. feladat. Az $\mathbb{R}^2$ vektortéren definiált q kvadratikus alak normálalakja 9-féleképpen festhet, de a két változó megcserélése erejéig csak 6 eset van. Írja fel a 6 lehetőséget, és mindegyiknek állapítsa meg a definitségi osztályát, valamint vázolja, hogy milyen görbéket adnak a kvadratikus alak szintvonalai, vagyis hogyan néznek ki az $\{(x, y) : q(x, y) = c\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ponthalmazok (és hogyan változnak, ha a c paraméter végigfut a számegyenesen).

---

73. feladat. Határozzuk meg az $\mathbb{R}^4$ euklideszi térben az $u = (1, 1, 1, 1)$ és $v = (3, -1, 3, -1)$ vektorok hosszát és az általuk bezárt szöget.

Megoldás.

$$\|u\| = \sqrt{4} = 2, \qquad \|v\| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}, \qquad \langle u, v\rangle = 4, \qquad \measuredangle(u, v) = \arccos \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} = \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 63^\circ$$

---

74. feladat. Legyen $S \leq \mathbb{R}^4$ az alábbi u_1, u_2, u_3 vektorok által kifeszített altér:

$$u_1 = (1, 1, 1, 1), \quad u_2 = (3, -1, 3, -1), \quad u_3 = (6, 2, 2, -2).$$

Adjunk meg egy ortonormált bázist az S altérben.

Megoldás. Hajtsuk végre a Gram–Schmidt-féle ortogonalizációs eljárást:

1. $v_1 = u_1 = (1, 1, 1, 1)$
2. $v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} \cdot v_1 = u_2 - \frac{4}{4} \cdot v_1 = u_2 - v_1 = (2, -2, 2, -2)$
3. $v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} \cdot v_1 - \frac{\langle u_3, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} \cdot v_2 = u_3 - \frac{8}{4} \cdot v_1 - \frac{16}{16} \cdot v_2 = u_3 - 2v_1 - v_2 = (2, 2, -2, -2)$

A kapott v_1, v_2, v_3 vektorrendszer ortogonális, és kifeszíti az S alteret. (Sőt, nemcsak $[v_1, v_2, v_3] = [u_1, u_2, u_3]$ teljesül, hanem $[v_1, v_2] = [u_1, u_2]$ és $[v_1] = [u_1]$ is.) Tehát v_1, v_2, v_3 ortogonális bázisa S-nek. Hogy ortonormált bázist kapjunk, „normáljuk le” a vektorokat:

1. $e_1 = \frac{1}{\|v_1\|} \cdot v_1 = \frac{1}{2} \cdot v_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
2. $e_2 = \frac{1}{\|v_2\|} \cdot v_2 = \frac{1}{4} \cdot v_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
3. $e_3 = \frac{1}{\|v_3\|} \cdot v_3 = \frac{1}{4} \cdot v_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Az e_1, e_2, e_3 vektorrendszer ortonormált bázisa S-nek (az ortonormáltság fejben is könnyen ellenőrizhető).

---

75. feladat. Bontsuk a w vektort az $S = [v_1, v_2]$ síkkal párhuzamos $w_\parallel$ és S-re merőleges $w_\perp$ vektor összegére, ahol

$$v_1 = (1, 2, 3), \quad v_2 = (1, 1, -1), \quad w = (2, 1, 2).$$

Megoldás. „Szerencsére” a v_1 és v_2 vektorok merőlegesek, azaz ortogonális bázist alkotnak S-ben, így $w_\parallel$ egyszerűen megkapható:

$$w_\parallel = \frac{\langle w, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} \cdot v_1 + \frac{\langle w, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} \cdot v_2 = \frac{10}{14} \cdot v_1 + \frac{1}{3} \cdot v_2 = \left(\frac{22}{21}, \frac{37}{21}, \frac{38}{21}\right).$$

A $w_\perp$ vektor pedig a „maradék” (ellenőrizzük fejben, hogy ez a vektor valóban merőleges v_1-re és v_2-re!):

$$w_\perp = w - w_\parallel = \left(\frac{20}{21}, \frac{-16}{21}, \frac{4}{21}\right).$$

Megjegyzés. A számolás gyakorlatilag egy Gram–Schmidt-féle eljárás utolsó lépése volt; az elejét megspórolhattuk, mert v_1 és v_2 már eleve merőleges volt. Ha nem így lett volna, akkor az egész Gram–Schmidt-ortogonalizációt le kellett volna futtatni a v_1, v_2, w vektorrendszerre (fontos a vektorok sorrendje, legalábbis az, hogy w legyen az utolsó vektor!). Alternatív megoldásként kereshetjük a $w_\parallel$ vektort $w_\parallel = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ alakban. Ekkor a $\langle w - w_\parallel, v_1\rangle = 0$ és $\langle w - w_\parallel, v_2\rangle = 0$ ortogonalitási feltételek adnak egy lineáris egyenletrendszert, amelynek megoldásaként megkapjuk a λ_1, λ_2 együtthatókat.

---

76. feladat. Mekkora szöget zár be az n-dimenziós kocka testátlója a kocka éleivel? Mi ennek a szögnek a határértéke, ha n tart végtelenbe?

77. feladat. Legyen $S \leq \mathbb{R}^3$ az $x + 2y - z = 0$ egyenletű sík, és legyen a $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció az S-re való tükrözés. Határozza meg a $v\varphi$ vektort tetszőleges $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ esetén. (Ezzel lényegében ekvivalens feladat felírni φ mátrixát a standard bázisban.)

78. feladat. Legyen V a legfeljebb harmadfokú valós polinomok euklideszi tere az alábbi belső szorzattal:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Ortogonalizálja a Gram–Schmidt-eljárás segítségével az $1, x, x^2, x^3$ vektorrendszert (így kapunk egy ortogonális bázist V-ben).

79. feladat. Tekintsük az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térben az $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ és $c = (c_1, \ldots, c_n)$ vektorokat, és tegyük fel, hogy a és b lineárisan független.

(a) (2 pont) Bontsa a c vektort az $S = [a, b]$ síkkal párhuzamos és S-re merőleges összetevő összegére. (A feladat természetesen megoldható a Gram–Schmidt-eljárással, de talán könnyebben kijön a 75. feladat megoldásához fűzött megjegyzésben vázolt alternatív módszerrel.)

(b) (2 pont) Adottak $(a_1, c_1), \ldots, (a_n, c_n)$ valós számpárok (mérési adatok), és ezekhez szeretnénk közelítő egyenest illeszteni. Pontosabban: azt az $f(x) = \lambda x + \mu$ elsőfokú függvényt keressük, amelyre az $f(a_i) - c_i$ hibák négyzetösszege minimális. Vezesse le az (a) rész megoldásából (alkalmasan megválasztva a b vektort), hogy az egyenes meredeksége

$$\lambda = \frac{\sum (a_i - \overline{a})(c_i - \overline{c})}{\sum (a_i - \overline{a})^2},$$

ahol $\overline{a}$ az $a_1, \ldots, a_n$ számok átlaga, $\overline{c}$ pedig a $c_1, \ldots, c_n$ számok átlaga.
