LINEÁRIS LEKÉPEZÉS MÁTRIXA(I)

Waldhauser Tamás

SZTE Bolyai Intézet

Lineáris leképezés mátrixa sorvektorokkal

- U vektortér T felett, bázisa: $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_m\}$
- $\alpha\colon T^m \to U$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \mapsto \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i$,
  $\alpha^{-1}\colon U \to T^m$, $u \mapsto [\![u]\!]_\mathcal{A}$ izomorfizmusok
- V vektortér T felett, bázisa: $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$
- $\beta\colon T^n \to V$, $(\mu_1, \ldots, \mu_n) \mapsto \sum_{j=1}^n \mu_j b_j$,
  $\beta^{-1}\colon V \to T^n$, $v \mapsto [\![v]\!]_\mathcal{B}$ izomorfizmusok
- $\varphi\colon U \to V$ lineáris leképezés

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, shift left, "\alpha^{-1}"] & V \arrow[d, shift left, "\beta^{-1}"] \\ T^m \arrow[u, shift left, "\alpha"] & T^n \arrow[u, shift left, "\beta"] \end{tikzcd}$$

Lineáris leképezés mátrixa sorvektorokkal

- U vektortér T felett, bázisa: $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_m\}$
- $\alpha\colon T^m \to U,\ (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \mapsto \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$,
  $\alpha^{-1}\colon U \to T^m,\ u \mapsto [\![u]\!]_{\mathcal{A}}$ izomorfizmusok
- V vektortér T felett, bázisa: $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$
- $\beta\colon T^n \to V,\ (\mu_1, \dots, \mu_n) \mapsto \sum_{j=1}^{n} \mu_j b_j$,
  $\beta^{-1}\colon V \to T^n,\ v \mapsto [\![v]\!]_{\mathcal{B}}$ izomorfizmusok
- $\varphi\colon U \to V$ lineáris leképezés

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\varphi"] & V \arrow[d, "\beta^{-1}"] \\
T^m \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "\cdot M"'] & T^n
\end{tikzcd}$$

Lineáris leképezés mátrixa sorvektorokkal

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] & V \arrow[d, "\beta^{-1}"] \\ T^m \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "\cdot M"'] & T^n \end{tikzcd}$$

Az $M \in T^{m \times n}$ mátrixot egyértelműen meghatározza az alábbi tulajdonság:

$$[\![u]\!]_{\mathcal{A}} \cdot M = [\![u\varphi]\!]_{\mathcal{B}} \qquad (\forall u \in U).$$

A mátrix úgy „készül”, hogy az $[\![a_1\varphi]\!]_{\mathcal{B}}, \ldots, [\![a_m\varphi]\!]_{\mathcal{B}}$ koordinátasorokat egymás alá írjuk.

Definíció

Az M mátrixot a φ lineáris leképezés mátrixának nevezzük az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ bázisokban. Jelölés: $M = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$.

$$\boxed{[\![u\varphi]\!]_{\mathcal{B}} = [\![u]\!]_{\mathcal{A}} \cdot [\![\varphi]\!]_{\mathcal{A},\mathcal{B}}}$$

Lineáris leképezés mátrixa sorvektorokkal

Példa

- $U = \{f \in \mathbb{R}[x] : \deg f \leq 3\}$, $\mathcal{A} = \{1, x, x^2, x^3\}$
- $V = \{f \in \mathbb{R}[x] : \deg f \leq 2\}$, $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$
- $\varphi \colon U \to V,\ f \mapsto f'$

$$\begin{aligned}
1\varphi &= 0 &&= 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 &&\Longrightarrow [\![1\varphi]\!]_{\mathcal{B}} = (0, 0, 0) \\
x\varphi &= 1 &&= 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 &&\Longrightarrow [\![x\varphi]\!]_{\mathcal{B}} = (1, 0, 0) \\
x^2\varphi &= 2x &&= 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 &&\Longrightarrow [\![x^2\varphi]\!]_{\mathcal{B}} = (0, 2, 0) \\
x^3\varphi &= 3x^2 &&= 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2 &&\Longrightarrow [\![x^3\varphi]\!]_{\mathcal{B}} = (0, 0, 3)
\end{aligned}$$

A koordinátasorokat egymás alá írva kapjuk φ mátrixát az $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ bázispárban:

$$[\![\varphi]\!]_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lineáris leképezés mátrixa sorvektorokkal

Példa (folyt.)

Ellenőrzésképpen nézzük meg, hogy az $f = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$ polinom koordinátasorából valóban az $f' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2$ polinom koordinátasorát kapjuk-e a $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ mátrixszal való szorzáskor:

$$(c_0, c_1, c_2, c_3) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = (c_1, 2c_2, 3c_3). \checkmark$$

Lineáris leképezés mátrixa sorvektorokkal

Példa

- $U = V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{F} = \{\,(1,2),\ (-2,1)\,\}$
- φ: tükrözés az $y = 2x$ egyenesre

$$\begin{aligned} f_1\varphi &= f_1 = 1\,f_1 + 0\,f_2 \implies [\![f_1\varphi]\!]_{\mathcal{F}} = (1,0) \\ f_2\varphi &= -f_2 = 0\,f_1 + (-1)\,f_2 \implies [\![f_2\varphi]\!]_{\mathcal{F}} = (0,-1) \end{aligned}$$

A koordinátasorokat egymás alá írva kapjuk φ mátrixát az $\mathcal{F},\mathcal{F}$ bázispárban:

$$[\![\varphi]\!]_{\mathcal{F},\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lineáris leképezés mátrixa sorvektorokkal

Példa

- $U = V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{E} = \{\,(1,0),\ (0,1)\,\}$
- φ: tükrözés az $y = 2x$ egyenesre

$$e_1\varphi = (-3/5, 4/5) = -\tfrac{3}{5}\,e_1 + \tfrac{4}{5}\,e_2 \implies [\![e_1\varphi]\!]_{\mathcal{E}} = (-3/5, 4/5)$$
$$e_2\varphi = (4/5, 3/5) = \tfrac{4}{5}\,e_1 + \tfrac{3}{5}\,e_2 \implies [\![e_2\varphi]\!]_{\mathcal{E}} = (4/5, 3/5)$$

A koordinátasorokat egymás alá írva kapjuk φ mátrixát az $\mathcal{E}, \mathcal{E}$ bázispárban:

$$[\![\varphi]\!]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Így kapunk egy képletet tetszőleges (x, y) pont tükörképének koordinátáira:

$$(x, y)\varphi = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} = \left(-\tfrac{3}{5}x + \tfrac{4}{5}y,\ \tfrac{4}{5}x + \tfrac{3}{5}y\right).$$

Lineáris leképezés mátrixa sorvektorokkal

Példa

- $U = V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{F} = \{\,(1,2),\ (-2,1)\,\}$
- φ: merőleges vetítés az $y = 2x$ egyenesre

$$\begin{aligned} f_1\varphi &= f_1 &= 1\,f_1 + 0\,f_2 &\implies [\![f_1\varphi]\!]_{\mathcal{F}} = (1, 0) \\ f_2\varphi &= 0 &= 0\,f_1 + 0\,f_2 &\implies [\![f_2\varphi]\!]_{\mathcal{F}} = (0, 0) \end{aligned}$$

A koordinátasorokat egymás alá írva kapjuk φ mátrixát az $\mathcal{F}, \mathcal{F}$ bázispárban:

$$[\![\varphi]\!]_{\mathcal{F},\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lineáris leképezés mátrixa sorvektorokkal

Példa

- $U = V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{E} = \{\,(1,0),\ (0,1)\,\}$
- φ: merőleges vetítés az $y = 2x$ egyenesre

$$e_1\varphi = (1/5, 2/5) = \tfrac{1}{5}\,e_1 + \tfrac{2}{5}\,e_2 \implies [\![e_1\varphi]\!]_{\mathcal{E}} = (1/5, 2/5)$$
$$e_2\varphi = (2/5, 4/5) = \tfrac{2}{5}\,e_1 + \tfrac{4}{5}\,e_2 \implies [\![e_2\varphi]\!]_{\mathcal{E}} = (2/5, 4/5)$$

A koordinátasorokat egymás alá írva kapjuk φ mátrixát az $\mathcal{E}, \mathcal{E}$ bázispárban:

$$[\![\varphi]\!]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{pmatrix}.$$

Így kapunk egy képletet tetszőleges (x, y) pont vetületének koordinátáira:

$$(x, y)\varphi = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{pmatrix} = \left(\tfrac{1}{5}x + \tfrac{2}{5}y,\ \tfrac{2}{5}x + \tfrac{4}{5}y\right).$$

Projekciók

Definíció

Ha $V = U \oplus W$ (direkt összeg), akkor az alábbi $\pi \in \mathrm{Hom}(V, V)$ lineáris transzformációt (az U-ra való W irányú) projekciónak nevezzük:

$$\pi \colon V \to V, \; u + w \mapsto u.$$

Tétel

A $\pi \in \mathrm{Hom}(V, V)$ lineáris transzformáció akkor és csak akkor projekció, ha $\pi^2 = \pi$ (azaz π idempotens).

Bizonyítás.

A táblán. ■

Ha $u_1, \dots, u_r$ bázis U-ban és $w_1, \dots, w_k$ bázis W-ben, akkor $\mathcal{B} := \{u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_k\}$ bázis V-ben, és

$$[\![\pi]\!]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} E_r & 0_{r\times k} \\ 0_{k\times r} & 0_{k\times k} \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0).$$

Műveletek lineáris leképezésekkel

Tétel

Ha $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(U, V)$ és $c \in T$, akkor

- $\varphi + \psi \in \mathrm{Hom}(U, V)$;
- $c\varphi \in \mathrm{Hom}(U, V)$;
- $\mathrm{Hom}(U, V)$ ezekkel a műveletekkel vektorteret alkot.

Bizonyítás.

[SzL: 11.2] ∎

Tétel

Ha $\varphi \in \mathrm{Hom}(U, V)$ és $\psi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor

- $\varphi\psi \in \mathrm{Hom}(U, W)$;
- teljesülnek az „elvárható” műveleti tulajdonságok.

Bizonyítás.

[SzL: 10.7, 11.3] ∎

Összhang a mátrixműveletekkel

Tétel

Legyen $\mathcal{E}$ bázis U-ban, $\mathcal{F}$ bázis V-ben és $\mathcal{G}$ bázis W-ben.

Ha $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(U, V)$, $\tau \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $c \in T$, akkor

- $[\![\varphi + \psi]\!]_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{E},\mathcal{F}} + [\![\psi]\!]_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$;
- $[\![c\varphi]\!]_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = c[\![\varphi]\!]_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$;
- $[\![\varphi\tau]\!]_{\mathcal{E},\mathcal{G}} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{E},\mathcal{F}} \cdot [\![\tau]\!]_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$;
- $\mathrm{r}(\varphi) = \mathrm{r}([\![\varphi]\!]_{\mathcal{E},\mathcal{F}})$.

Bizonyítás.

[SzL: 12.3, 13.7] ∎

Összhang a mátrixműveletekkel

Következmény

Ha $\dim U = m$ és $\dim V = n$, akkor a $\mathrm{Hom}(U, V)$ vektortér izomorf a $T^{m\times n}$ vektortérrel az alábbi izomorfizmus mellett:

$$\mathrm{Hom}(U, V) \to T^{m\times n},\ \varphi \mapsto [\![\varphi]\!]_{\mathcal{E},\mathcal{F}}.$$

Következésképp $\mathrm{Hom}(U, V)$ egy mn-dimenziós vektortér.

Bizonyítás.

[SzL: 12.4] ■

Következmény

Ha $\dim U = m$, akkor a $\mathrm{Hom}(U, U)$ gyűrű izomorf a $T^{m\times m}$ gyűrűvel az alábbi izomorfizmus mellett:

$$\mathrm{Hom}(U, U) \to T^{m\times m},\ \varphi \mapsto [\![\varphi]\!]_{\mathcal{E},\mathcal{E}}.$$

Áttérés új bázisra

- V két bázisa: $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$
- $\varphi = \mathrm{id}\colon V \to V,\ v \mapsto v$ identikus leképezés

$$\begin{tikzcd} \overset{\mathcal{E}}{V} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"'] & \overset{\mathcal{F}}{V} \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"] \\ T^n \arrow[r, "\cdot M"'] & T^n \end{tikzcd}$$

Itt az $M = [\![\mathrm{id}]\!]_{\mathcal{E},\mathcal{F}} \in T^{n\times n}$ mátrix azt „tudja", hogy

$$[\![v]\!]_{\mathcal{E}} \cdot M = [\![v\varphi]\!]_{\mathcal{F}} = [\![v]\!]_{\mathcal{F}} \qquad (\forall v \in V).$$

A mátrix úgy „készül", hogy az $[\![e_1]\!]_{\mathcal{F}}, \ldots, [\![e_m]\!]_{\mathcal{F}}$ koordinátasorokat egymás alá írjuk.

Definíció

Az M mátrixot az $\mathcal{E}$ bázisról az $\mathcal{F}$ bázisra való bázisáttérés mátrixának nevezzük. Jelölés: $M = [\![\mathcal{E} \to \mathcal{F}]\!]$.

$$\boxed{[\![v]\!]_{\mathcal{F}} = [\![v]\!]_{\mathcal{E}} \cdot [\![\mathcal{E} \to \mathcal{F}]\!]}$$

Áttérés új bázisra

Példa

- $V = \mathbb{R}^2$,
- $\mathcal{E} = \{\,(1,0),\ (0,1)\,\}$,
- $\mathcal{F} = \{\,(1,2),\ (-2,1)\,\}$

Az $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ bázisáttéréshez ki kell fejeznünk $\mathcal{E}$ elemeit $\mathcal{F}$ elemeiből:

$$\begin{aligned} e_1 &= \tfrac{1}{5} f_1 + \left(-\tfrac{2}{5}\right) f_2 \implies [\![e_1]\!]_{\mathcal{F}} = (1/5, -2/5) \\ e_2 &= \tfrac{2}{5} f_1 + \tfrac{1}{5} f_2 \implies [\![e_2]\!]_{\mathcal{F}} = (2/5, 1/5) \end{aligned}$$

A koordinátasorokat egymás alá írva kapjuk az $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ bázisáttérés mátrixát:

$$[\![\mathcal{E} \to \mathcal{F}]\!] = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Áttérés új bázisra

Példa (folyt.)

- $V = \mathbb{R}^2$,
- $\mathcal{E} = \{\,(1,0),\ (0,1)\,\}$,
- $\mathcal{F} = \{\,(1,2),\ (-2,1)\,\}$

Az $\mathcal{F} \to \mathcal{E}$ bázisáttéréshez nem is kell számolni:

$$\begin{aligned} f_1 &= 1\, e_1 + 2\, e_2 &&\Longrightarrow [\![f_1]\!]_{\mathcal{E}} = (1, 2) \\ f_2 &= -2\, e_1 + 1\, e_2 &&\Longrightarrow [\![f_2]\!]_{\mathcal{E}} = (-2, 1) \end{aligned}$$

A koordinátasorokat egymás alá írva kapjuk az $\mathcal{F} \to \mathcal{E}$ bázisáttérés mátrixát:

$$[\![\mathcal{F} \to \mathcal{E}]\!] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Áttérés új bázisra

Példa (folyt.)

Figyeljük meg, hogy a két bázisáttérés-mátrix egymás inverze:

$$\begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Ez persze nem véletlen. . .

Tétel

Teszőleges V vektortér tetszőleges $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisai esetén a két bázisáttérés-mátrix egymás inverze:

$$[\![\mathcal{F} \to \mathcal{E}]\!] = [\![\mathcal{E} \to \mathcal{F}]\!]^{-1}$$

Bizonyítás.

$$[\![v]\!]_{\mathcal{F}} = [\![v]\!]_{\mathcal{E}} \cdot [\![\mathcal{E} \to \mathcal{F}]\!] = [\![v]\!]_{\mathcal{F}} \cdot [\![\mathcal{F} \to \mathcal{E}]\!] \cdot [\![\mathcal{E} \to \mathcal{F}]\!] \qquad \blacksquare$$

Lineáris leképezés mátrixai különböző bázisokban

- U két bázisa: $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$
- V két bázisa: $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$
- $\varphi\colon U \to V$ lineáris leképezés

$$\begin{tikzcd}
\overset{\mathcal{A}}{U} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, leftrightarrow, "\mathrm{id}"'] & \overset{\mathcal{E}}{V} \arrow[d, leftrightarrow, "\mathrm{id}"] \\
\underset{\mathcal{B}}{U} \arrow[r, "\varphi"'] & \underset{\mathcal{F}}{V}
\end{tikzcd}$$

Használjuk a lineáris leképezések és a mátrixok szorzása közötti összhangot:

$$\begin{aligned}
[\![\varphi]\!]_{\mathcal{B},\mathcal{F}} &= [\![\mathrm{id}\,\varphi\,\mathrm{id}]\!]_{\mathcal{B},\mathcal{F}} = \\
&= [\![\mathrm{id}]\!]_{\mathcal{B},\mathcal{A}} \cdot [\![\varphi]\!]_{\mathcal{A},\mathcal{E}} \cdot [\![\mathrm{id}]\!]_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = \\
&= [\![\mathcal{B} \to \mathcal{A}]\!] \cdot [\![\varphi]\!]_{\mathcal{A},\mathcal{E}} \cdot [\![\mathcal{E} \to \mathcal{F}]\!]
\end{aligned}$$

Lineáris leképezés mátrixai különböző bázisokban

Tétel

Ha $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ bázisa U-nak, $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisa V-nek, és $\varphi \in \mathrm{Hom}(U, V)$, akkor

$$\boxed{[\![\varphi]\!]_{\mathcal{B},\mathcal{F}} = [\![\mathcal{B} \to \mathcal{A}]\!] \cdot [\![\varphi]\!]_{\mathcal{A},\mathcal{E}} \cdot [\![\mathcal{E} \to \mathcal{F}]\!]}$$

Következmény

Ha $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisa V-nek, és $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, V)$, akkor

$$[\![\varphi]\!]_{\mathcal{F},\mathcal{F}} = [\![\mathcal{F} \to \mathcal{E}]\!] \cdot [\![\varphi]\!]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} \cdot [\![\mathcal{E} \to \mathcal{F}]\!] = [\![\mathcal{E} \to \mathcal{F}]\!]^{-1} \cdot [\![\varphi]\!]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} \cdot [\![\mathcal{E} \to \mathcal{F}]\!].$$

$$\boxed{[\![\varphi]\!]_{\mathcal{F},\mathcal{F}} = [\![\mathcal{E} \to \mathcal{F}]\!]^{-1} \cdot [\![\varphi]\!]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} \cdot [\![\mathcal{E} \to \mathcal{F}]\!]}$$

Lineáris leképezés mátrixai különböző bázisokban

Definíció

Azt mondjuk, hogy az $A, B \in T^{n \times n}$ mátrixok hasonlóak, ha létezik olyan $P \in T^{n \times n}$ nemelfajuló mátrix, amelyre $B = P^{-1}AP$. Jelölés: $A \sim B$.

Tétel

(1) A hasonlóság ekvivalenciareláció a T feletti $n \times n$-es mátrixok halmazán.

(2) Két mátrix akkor és csak akkor hasonló, ha ugyanannak a lineáris transzformációnak a mátrixai különböző bázisoknan.

Bizonyítás.

(1) [SzL: 4.5]

(2) Következik az előzőekből, csak azt kell észrevenni, hogy minden nemelfajuló mátrix felfogható egy bázisáttérés mátrixaként.

∎

Lineáris leképezés mátrixai különböző bázisokban

Példa

- $U = V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{E} = \{\,(1,0),\ (0,1)\,\}$, $\mathcal{F} = \{\,(1,2),\ (-2,1)\,\}$
- φ: tükrözés az $y = 2x$ egyenesre

Az $\mathcal{F},\mathcal{F}$ bázispárban könnyű volt felírni φ mátrixát:

$$[\![\varphi]\!]_{\mathcal{F},\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Az $\mathcal{F} \to \mathcal{E}$ bázisáttérés mátrixához se kellett semmit számolni:

$$[\![\mathcal{F} \to \mathcal{E}]\!] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ezekből (is) megkaphatjuk φ mátrixát az $\mathcal{E},\mathcal{E}$ bázispárban:

$$[\![\varphi]\!]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = [\![\mathcal{F} \to \mathcal{E}]\!]^{-1} \cdot [\![\varphi]\!]_{\mathcal{F},\mathcal{F}} \cdot [\![\mathcal{F} \to \mathcal{E}]\!] = \ldots$$

Lineáris leképezés mátrixai különböző bázisokban

Példa (folyt.)

$$
\begin{aligned}
[\![\varphi]\!]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} &= [\![\mathcal{F} \to \mathcal{E}]\!]^{-1} \cdot [\![\varphi]\!]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} \cdot [\![\mathcal{F} \to \mathcal{E}]\!] = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$