

## A lexikografikus rendezés egy tulajdonsága (kiegészítés a 4.7. Állításhoz)

**Tétel.** Tetszőleges  $T$  test és  $n \in \mathbb{N}$  esetén a  $T[x_1, \dots, x_n]$ -beli monomok lexikografikus rendezésében nincsen végtelen csökkenő sorozat, azaz nem léteznek olyan  $M_1, M_2, \dots$  monomok, melyekre  $M_1 \sqsupset M_2 \sqsupset \dots$ .

**Bizonyítás helyett.** Az  $n = 2$  esettel foglalkozunk. Egy  $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}$  monomot ábrázolhatunk a síkon a  $(k_1, k_2)$  koordinátájú ponttal. (Az  $a$  együttható nem fontos, elég a monomokat csak asszociáltság erejéig tekinteni.) Az alábbi feladatokat megoldva kiderül, hogy miért kell minden csökkenő monomsorozatnak előbb-utóbb megszakadnia. Ez persze nem precíz bizonyítás (még az  $n = 2$  esetre sem), de a bizonyítás fő gondolata remélhetőleg világossá válik.

- (1) Hol találhatóak a síkon azon  $M$  monomok(nak megfelelő pontok), amelyek lexikografikusan kisebbek  $x_1^2x_2^4$ -nél, azaz amelyekre  $M \sqsubset x_1^2x_2^4$  teljesül?
- (2) Induljunk ki az  $M_0 = x_1^2x_2^4$  monomból, és lépkedjünk innen lefelé a lexikografikus rendezésben. Adjunk meg egy kétlépéses „sétát”, azaz egy  $M_0 \sqsupset M_1 \sqsupset M_2$  szigorúan csökkenő monomsorozatot.
- (3) Adjunk meg  $M_0$ -ból egy hétlépéses lefelé vezető sétát (vagy az előző séta folytatásával, vagy pedig másfelé indulva).
- (4) Adjunk meg  $M_0$ -ból egy százlépéses lefelé vezető sétát.
- (5) Adjunk meg  $M_0$ -ból egy egymillió lépéses lefelé vezető sétát.
- (6) Ezek után már akármilyen hosszú véges sétát meg tudunk adni (ugye?).
- (7) Miért nem tudunk  $M_0$ -ból (vagy máshonnan) végtelen hosszú lefelé vezető sétát tenni?
- (8) Vázoljuk fel a monomok lexikografikus rendezésének Hasse-diagramját (az asszociált monomokat nem kell megkülönböztetni), és rajzoljuk le (vagy csak képzeljük el) a fenti sétákat ebben a diagramban is.
- (9) Mi a helyzet három dimenzióban, vagyis a  $T[x_1, x_2, x_3]$ -beli monomokkal? Ezeket térbeli pontokkal lehet ábrázolni, és itt is érdemes elképzelni, hogy hogyan lehet egy adott pontból kiindulva bármilyen hosszán (de csak véges hosszán!) lefelé lépkedni.