

**KLASSZIKUS ALGEBRA RUTINFELADATOK (2016 TAVASZ)**

**1. feladat.** Fejezze be az 1.3. Tétel bizonyítását.

**2. feladat.** Számítsa ki kanonikus alakban:

$$\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 + i} = ?$$

**3. feladat.** Számítsa ki kanonikus alakban:

$$\frac{2 + 3i}{1 + 4i} = ?, \quad \frac{5 - 7i}{2 - i} = ?$$

**4. feladat.** Fejezze be az 1.11. Tétel bizonyítását.

**5. feladat.** Fejezze be az 1.15. Tétel bizonyítását.

**6. feladat.** Számítsa ki az alábbi komplex számokat, ahol  $u = 2 - 3i$  és  $v = 1 + i$ :

$$u\bar{v} + \bar{u}v, \quad \frac{\bar{u}}{v} + \frac{u}{\bar{v}}, \quad |uv|, \quad \left| \frac{u}{v} \right|$$

**7. feladat.** Ábrázolja a Gauss-féle számsíkon az alábbi számhalmazokat:

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(z + 3) < 1\}, \quad \{z \in \mathbb{C} : |iz - i| = 1\}.$$

**8. feladat.** Ábrázolja a Gauss-féle számsíkon az alábbi számhalmazokat:

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(iz) = 2\}, \quad \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(\bar{z} - i) > 1\}, \quad \{z \in \mathbb{C} : |\bar{z} + 2 - i| \leq 2\}, \quad \{z \in \mathbb{C} : |iz - 1 - i| > 1\}$$

**9. feladat.** Számítsa ki trigonometrikus alakban:

$$\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 + i} = ?$$

**10. feladat.** Számítsa ki trigonometrikus és kanonikus alakban is:

$$(3 - \sqrt{3}i)(2 - 2i) = ?, \quad \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{\sqrt{3} + i} = ?$$

**11. feladat.** Számítsa ki trigonometrikus alakban, és adja meg a végeredményt kanonikus alakban is:

$$(-1 + i)^{2422} = ?$$

**12. feladat.** Számítsa ki trigonometrikus alakban, és adja meg a végeredményt kanonikus alakban is:

$$(\sqrt{3} + i)^{1208} = ?, \quad (2 + 2\sqrt{3}i)^{605} = ?$$

**13. feladat.** Ábrázolja a Gauss-féle számsíkon az alábbi számhalmazt:

$$\{z \in \mathbb{C} : \arg(z + zi) = \pi\}$$

**14. feladat.** Ábrázolja a Gauss-féle számsíkon az alábbi számhalmazokat:

$$\left\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \arg(zi) < \frac{\pi}{3}\right\}, \quad \left\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{6} < \arg(\bar{z}) \leq \frac{\pi}{4}\right\}$$

**15. feladat.** Számítsa ki trigonometrikus alakban, és adja meg a végeredményt kanonikus alakban is:

$$\sqrt[3]{-2 + 2i} = ?$$

**16. feladat.** Számítsa ki trigonometrikus alakban, és adja meg a végeredményt kanonikus alakban is:

$$\sqrt[3]{i} = ?, \quad \sqrt[4]{-1 - \sqrt{3}i} = ?, \quad \sqrt[6]{64} = ?, \quad \sqrt[6]{-27} = ?$$

**17. feladat.** Írja és rajzolja fel a 6. egységgyököket, és mindegyikről állapítsa meg, hogy hányadik primitív egységgyök.

**18. feladat.** Írja és rajzolja fel a 8. és a 12. egységgyököket, és mindegyikről állapítsa meg, hogy hányadik primitív egységgyök.

**19. feladat.** Egységgyökök-e a következő komplex számok, és ha igen, akkor hányadik primitív egységgyökök?

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad \operatorname{cis} \frac{5\pi}{12}$$

**20. feladat.** Egységgyökök-e a következő komplex számok, és ha igen, akkor hányadik primitív egységgyökök?

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \operatorname{cis} \frac{6\pi}{7}, \quad \operatorname{cis} \frac{7\pi}{10}$$

**21. feladat.** Az alábbi halmazok közül melyek alkotnak gyűrűt a szokásos összeadás és szorzás műveletével?

$$\mathbb{C}, \quad \mathbb{R}, \quad \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Z}, \quad \mathbb{R}^+, \quad \mathbb{Q}^+, \quad \mathbb{N}, \quad \{\text{páros számok}\}, \quad \{\text{páratlan számok}\}, \\ \{\text{irracionális számok}\}, \quad \{\text{véges tizedestörtek}\}, \quad \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$$

**22. feladat.** A 21. feladatbeli halmazok közül melyek alkotnak integritástartományt a szokásos összeadás és szorzás műveletével?

**23. feladat.** A 21. feladatbeli halmazok közül melyek alkotnak testet a szokásos összeadás és szorzás műveletével?

**24. feladat.** Az alábbi számhalmazok közül melyek alkotnak gyűrűt, integritástartományt, illetve testet a szokásos összeadás és szorzás műveletével?

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}, \quad \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}, \quad \mathbb{Q}(i) = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Q}\}, \\ \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z} \text{ és } a \text{ páros}\}, \quad \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z} \text{ és } b \text{ páros}\}, \quad \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z} \text{ és } a \text{ is és } b \text{ is páros}\}, \\ \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z} \text{ és } a \equiv b \pmod{2}\}, \quad \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z} \text{ és } a \equiv b \pmod{3}\}$$

**25. feladat.** Fejezze be a 2.30. Tétel bizonyítását.

**26. feladat.** Határozza meg az alábbi két polinom legnagyobb közös osztóját:

$$f = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 3, \quad g = x^3 + x^2 + x - 3.$$

**27. feladat.** Oldja meg az  $fu + gv = \text{lko}(f, g)$  egyenletet az  $\mathbb{R}[x]$  polinomgyűrűben, ahol

$$f = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 3, \quad g = x^3 + x^2 + x - 3.$$

**28. feladat.** Oldja meg az  $fu + gv = \bar{1}$  egyenletet az  $\mathbb{Z}_5[x]$  polinomgyűrűben, ahol

$$f = x^2 + \bar{3}x + \bar{1}, \quad g = x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{4}x + \bar{2}.$$

**29. feladat.** Határozza meg  $f$  és  $g$  legnagyobb közös osztóját, oldja meg az  $fu + gv = \text{lko}(f, g)$  egyenletet, és számítsa ki  $f$  és  $g$  komplex gyökeit, ahol

$$f = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2, \quad g = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2.$$

**30. feladat.** Határozza meg  $f$  és  $g$  legnagyobb közös osztóját, oldja meg az  $fu + gv = \text{lko}(f, g)$  egyenletet, és számítsa ki  $f$  és  $g$  komplex gyökeit, ahol

$$f = x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x - 3, \quad g = x^4 + x^3 + x^2 + 3x - 6.$$

**31. feladat.** Oldja meg az  $fu + gv = \text{lko}(f, g)$  egyenletet  $\mathbb{Z}_2[x]$ -ben:

$$f = x^4 + x^3 + x^2 + \bar{1}, \quad g = x^3 + \bar{1}.$$

**32. feladat.** Oldja meg az  $fu + gv = \text{lko}(f, g)$  egyenletet  $\mathbb{Z}_2[x]$ -ben:

$$f = x^4 + x^3 + x, \quad g = x^4 + x^2 + x.$$

**33. feladat.** Oldja meg az  $fu + gv = \bar{1}$  egyenletet  $\mathbb{Z}_7[x]$ -ben:

$$f = x^4 + \bar{6}x^3 + \bar{3}x^2 + \bar{2}x + \bar{4}, \quad g = x^2 + \bar{6}x + \bar{3}.$$

**34. feladat.** Oldja meg az  $fu + gv = \bar{1}$  egyenletet  $\mathbb{Z}_5[x]$ -ben:

$$f = x^3 + \bar{4}x, \quad g = \bar{2}x^2 + \bar{3}x + \bar{2}.$$

**35. feladat.** Oldja meg az  $f \cdot u \equiv \bar{1} \pmod{m}$  konruenciát a  $\mathbb{Z}_5[x]$  polinomgyűrűben, ahol

$$f = x^2 + \bar{3}x + \bar{1}, \quad m = x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{4}x + \bar{2}.$$

**36. feladat.** Oldja meg az  $f \cdot u \equiv \bar{1} \pmod{m}$  konruenciát a  $\mathbb{Z}_2[x]$  polinomgyűrűben, ahol

$$f = x^2 + \bar{1}, \quad m = x^3 + x^2 + \bar{1}.$$

**37. feladat.** Határozza meg az  $\bar{f} \in \mathbb{Z}_5[x]/(m)$  maradékosztály multiplikatív inverzét, ahol

$$f = x^2 + \bar{3}x + \bar{1}, \quad m = x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{4}x + \bar{2}.$$

**38. feladat.** Határozza meg az  $\bar{f} \in \mathbb{Z}_2[x]/(m)$  maradékosztály multiplikatív inverzét, ahol

$$f = x^2 + 1 \quad m = x^3 + x^2 + 1.$$

**39. feladat.** Számítsa ki a  $\mathbb{Z}_5[x]/(x^3 + x + 1)$  gyűrűben  $\overline{3x^2 + 2}$  multiplikatív inverzét.

**40. feladat.** Számítsa ki a  $\mathbb{Z}_5[x]/(x^3 + x^2 + x + 1)$  gyűrűben  $\overline{2x^2 + 4}$  multiplikatív inverzét.

**41. feladat.** Számítsa ki a  $\mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x^2 + 1)$  gyűrűben  $\overline{x^2}$  multiplikatív inverzét.

**42. feladat.** Számítsa ki a  $\mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x + 1)$  gyűrűben  $\bar{x}$  multiplikatív inverzét.

**43. feladat.** Határozza meg azt a legalacsonyabb fokszámú  $f \in \mathbb{R}[x]$  polinomot, amelyre

$$f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 8.$$

**44. feladat.** Határozza meg azt a legalacsonyabb fokszámú  $f \in \mathbb{R}[x]$  polinomot, amelyre

$$f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 4, f(4) = 3.$$

**45. feladat.** Határozza meg azt a legalacsonyabb fokszámú  $f \in \mathbb{R}[x]$  polinomot, amelyre

$$f(-1) = 10, f(0) = 5, f(1) = 3, f(2) = 4.$$

**46. feladat.** Fejezze be a 3.38. Tétel bizonyítását.

**47. feladat.** Hányszoros gyöke  $c = 1$  az  $f = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$  polinomnak?

**48. feladat.** Hányszoros gyöke  $c = 2$  az  $f = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$  polinomnak?

**49. feladat.** Hányszoros gyöke  $c = -2$  az  $f = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$  polinomnak?

**50. feladat.** Számítsa ki az  $f = x^4 + 4ix^3 - 7x^2 - 6ix - 4$  polinom komplex gyökeit az  $y = x + i$  határozatlanra való áttérés segítségével.

**51. feladat.** Számítsa ki az  $f = x^4 - 4ix^3 - 3x^2 - 2ix - 12$  polinom komplex gyökeit az  $y = x - i$  határozatlanra való áttérés segítségével.

**52. feladat.** Számítsa ki az  $f = x^4 + 8ix^3 - 26x^2 - 40ix + 21$  polinom komplex gyökeit az  $y = x + 2i$  határozatlanra való áttérés segítségével.

**53. feladat.** Bontsa irreducibilis tényezők szorzatára az alábbi polinomot:

$$f = x^6 + 3x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 1 \in \mathbb{Z}_5[x].$$

**54. feladat.** Bontsa irreducibilis tényezők szorzatára az alábbi polinomot:

$$x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x].$$

**55. feladat.** Bontsa irreducibilis tényezők szorzatára az alábbi polinomot:

$$x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x].$$

**56. feladat.** Bontsa irreducibilis tényezők szorzatára az alábbi polinomot:

$$x^5 + x^4 + 2x^3 + 1 \in \mathbb{Z}_5[x].$$

**57. feladat.** Bontsa irreducibilis tényezők szorzatára az alábbi polinomot:

$$x^5 + x^3 + 4x^2 + 4 \in \mathbb{Z}_5[x].$$

**58. feladat.** Határozza meg  $\mathbb{Z}_2$  felett az összes legfeljebb harmadfokú irreducibilis polinomot.

**59. feladat.** Bontsa irreducibilis tényezők szorzatára az alábbi polinomokat:

$$x^4 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x], \quad x^4 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x].$$

**60. feladat.** Határozza meg az  $f = x^6 - 27$  polinom irreducibilis felbontását  $\mathbb{C}$  és  $\mathbb{R}$  felett.

**61. feladat.** Határozza meg az  $f = x^6 + 1$  polinom irreducibilis felbontását  $\mathbb{C}$  és  $\mathbb{R}$  felett.

**62. feladat.** Határozza meg az  $f = x^8 - 16$  polinom irreducibilis felbontását  $\mathbb{C}$  és  $\mathbb{R}$  felett.

**63. feladat.** Határozza meg az  $f = x^4 - x^2 + 1$  polinom irreducibilis felbontását  $\mathbb{C}$  és  $\mathbb{R}$  felett.

**64. feladat.** Határozza meg az  $f = x^6 + 7x^3 - 8$  polinom irreducibilis felbontását  $\mathbb{C}$  és  $\mathbb{R}$  felett.

**65. feladat.** Határozza meg az  $f = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$  polinom irreducibilis felbontását  $\mathbb{C}$  és  $\mathbb{R}$  felett.

**66. feladat.** Bontsa  $\mathbb{Q}$  felett irreducibilis polinomok szorzatára az alábbi polinomot:

$$f = 2x^7 + 5x^6 + 4x^5 + 13x^4 + 54x^3 + 84x^2 + 54x + 12.$$

**67. feladat.** Bontsa  $\mathbb{Q}$  felett irreducibilis polinomok szorzatára az alábbi polinomot:

$$f = 3x^{100} - 10x^{50} + 100x - 50.$$

**68. feladat.** Bontsa  $\mathbb{Q}$  felett irreducibilis polinomok szorzatára az alábbi polinomot:

$$f = 4x^4 - 7x^2 - 5x - 1.$$

**69. feladat.** Bontsa  $\mathbb{Q}$  felett irreducibilis polinomok szorzatára az alábbi polinomot:

$$3x^6 + 2x^5 - 7x^4 + 2.$$

**70. feladat.** Bontsa  $\mathbb{Q}$  felett irreducibilis polinomok szorzatára az alábbi polinomot:

$$2x^6 - x^5 + 15x + 12.$$

**71. feladat.** Bontsa  $\mathbb{Q}$  felett irreducibilis polinomok szorzatára az alábbi polinomot:

$$x^5 - 2x^3 + x^2 + x - 1.$$

**72. feladat.** Bontsa  $\mathbb{Q}$  felett irreducibilis polinomok szorzatára az alábbi polinomot:

$$x^5 - x^4 - x^3 + 2x^2 - 1.$$

**73. feladat.** Bontsa  $\mathbb{Q}$  felett irreducibilis polinomok szorzatára az alábbi polinomot:

$$x^6 - x^5 - 2x^3 - 3x^2 - x - 2.$$

**74. feladat.** Bontsa  $\mathbb{Q}$  felett irreducibilis polinomok szorzatára az alábbi polinomot:

$$x^6 + x^5 + 2x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 4x - 8.$$

**75. feladat.** Írja fel a  $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + x + 1)$  négyelemű test összeadó- és szorzótábláját.

**76. feladat.** Hány elemű a  $\mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x^2 + 1)$  gyűrű? Test-e ez a gyűrű?

**77. feladat.** Hány elemű a  $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2 + 1)$  gyűrű? Test-e ez a gyűrű?

**78. feladat.** Hány elemű a  $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 1)$  gyűrű? Test-e ez a gyűrű?

**79. feladat.** Hány elemű a  $\mathbb{Z}_3[x]/(x^3 + x^2 + 1)$  gyűrű? Test-e ez a gyűrű?

**80. feladat.** Hány elemű a  $\mathbb{Z}_5[x]/(x^3 + 2)$  gyűrű? Test-e ez a gyűrű?

**81. feladat.** Hány elemű a  $\mathbb{Z}_7[x]/(x^2 + 2)$  gyűrű? Test-e ez a gyűrű?

**82. feladat.** Számítsa ki a  $\mathbb{Z}_3[x]/(x^3 - x + 1)$  testben az alábbi hányadosokat:

$$\overline{1/2x^2 + 1} = ?, \quad \overline{x/x + 1} = ?$$

**83. feladat.** Számítsa ki a  $\mathbb{Z}_3[x]/(x^3 - x^2 + x + 1)$  testben az alábbi hányadosokat:

$$\overline{1/x + 1} = ?, \quad \overline{x^2/x - 1} = ?.$$

**84. feladat.** Számítsa ki a  $\mathbb{Z}_3[x]/(x^3 + x^2 - x + 1)$  testben az alábbi hányadosokat:

$$\overline{1/x} = ?, \quad \overline{x/x - 1}.$$

**85. feladat.** Határozza meg a  $K = \mathbb{Q}[x]/(x^3 - 7)$  testben a  $\overline{2 - x}$  elem multiplikatív inverzét.

**86. feladat.** Határozza meg a  $\mathbb{Q}[x]/(x^3 - 2)$  testben az  $\overline{x^2 + 3x + 4}$  elem multiplikatív inverzét, majd gyöktelenítse ennek segítségével a következő tört nevezőjét:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4 + 3\sqrt[3]{2} + 4}}.$$

**87. feladat.** Határozza meg a  $\mathbb{Q}[x]/(x^3 - 5)$  testben az  $\overline{x^2 + 3x - 2}$  elem multiplikatív inverzét, majd gyöktelenítse ennek segítségével a következő tört nevezőjét:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{25 + 3\sqrt[3]{5} - 2}}.$$

**88. feladat.** Fejezze be a 3.72. Tétel bizonyítását.

**89. feladat.** A derivált vizsgálatával határozza meg az  $f = x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4$  polinom többszörös gyökeit, majd az összes gyökét (multiplicitással együtt).

**90. feladat.** A derivált vizsgálatával határozza meg az  $f = 3x^4 - 4x^3 + 1$  polinom többszörös gyökeit, majd az összes gyökét (multiplicitással együtt).

**91. feladat.** A derivált vizsgálatával határozza meg az alábbi  $f = x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4$  polinom többszörös gyökeit, majd az összes gyökét (multiplicitással együtt).

**92. feladat.** Mutassa meg, hogy az  $ax^2 + bx + c$  polinom diszkriminánsa  $a^2(\alpha_1 - \alpha_2)^2 = b^2 - 4ac$ .

**93. feladat.** Fejezze ki az  $f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$  polinomot az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

**94. feladat.** Anélkül, hogy megkeresné a gyököket, határozza meg az  $f = x^3 - 3x^2 + x - 8$  polinom gyökeinek köbösszegét, valamint számtani, mértani és harmonikus közepét.

**95. feladat.** Fejezze ki az  $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$  polinomot az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

**96. feladat.** Anélkül, hogy megkeresné a gyököket, határozza meg az  $f = 2x^3 + 4x^2 - 6x + 2$  polinom gyökeinek negyedik hatványösszegét.

**97. feladat.** Fejezze be az 5.9. Állítás bizonyítását.

**98. feladat.** Fejezze be az 5.12. Állítás bizonyítását.

**99. feladat.** Fejezze be az 5.30. Tétel bizonyítását.

**100. feladat.** Fejezze be az 5.42. Tétel bizonyítását.