KLASSZIKUS ALGEBRA

VIZSGADOLGOZAT (MINTA)

Név: ....

EHA: ....

1.	2.	3.	4.	5.	6.

Tudnivalók: Az első négy feladat eldöntendő kérdéseket tartalmaz; a pontozott vonalra írt I, illetve N betűvel jelezze, hogy „igen” vagy „nem” a válasz a kérdésre. Az 1. feladatnál a választ nem kell indokolni; ha mindhárom válasz helyes, akkor 2 pont jár, ha két válasz helyes, akkor 1 pont, egyébként pedig 0 pont. A 2., 3. és 4. feladatoknál viszont indoklást is kell írni; csak akkor jár pont, ha a válasz és az indoklás is helyes. Az 5. és a 6. feladat „számolós” rutinfeladat; itt is meg kell adni a végeredményhez elvezető levezetést vagy indoklást, pont csak akkor jár, ha a végeredmény és az indoklás is helyes.
Semmilyen segédeszköz nem használható, még függvénytáblázat, számológép, mobiltelefon sem. Bármiféle nem megengedett segédeszköz használata esetén a dolgozat automatikusan 0 pontos, javítási lehetőség nélkül. A rendelkezésre álló idő 45 perc.

---

1. feladat (2 pont)

..... **(a)** Igaz-e, hogy minden integritástartomány test?

..... **(b)** Igaz-e minden $f \in \mathbb{R}[x]$ polinomra és c valós számra, hogy ha c kétszeres gyöke f'-nek, akkor c háromszoros gyöke f-nek?

..... **(c)** Igaz-e, hogy bármely $0 \neq f \in \mathbb{Q}[x]$ polinom esetén f komplex gyökeinek köbösszege racionális szám?

..... **2. feladat** (2 pont)

Igaz-e, hogy ha z primitív nyolcadik egységgyök, akkor z^{2019} is primitív nyolcadik egységgyök? Ha igaz, akkor bizonyítsa be; ha nem, akkor adjon meg egy ellenpéldát!

..... **3. feladat** (2 pont)

Igaz-e minden 2016-odfokú racionális együtthatós f polinomra, hogy ha f irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, akkor f-nek nincs valós gyöke? Ha igaz, akkor bizonyítsa be; ha nem, akkor adjon meg egy ellenpéldát!

..... **4. feladat** (2 pont)

Létezik-e olyan $f \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ szimmetrikus polinom, melynek tagjai között szerepel $x_1 x_2^2$? Ha igen, akkor adjon meg egy példát; ha nem, akkor bizonyítsa be, hogy valóban nem létezik ilyen polinom!

Piszkozat helye

5. feladat (2 pont)

Számítsa ki a $\mathbb{Z}_5[x] / \left(x^3 + x^2 + x + 1\right)$ gyűrűben $\overline{2x^2 + 4}$ multiplikatív inverzét.

6. feladat (2 pont)

Határozza meg azt a legalacsonyabb fokszámú $f \in \mathbb{R}[x]$ polinomot, amelyre

$$f(1) = 2,\ f(2) = 1,\ f(3) = 4,\ f(4) = 3.$$