

KLASSZIKUS ALGEBRA RUTINFELADATOK (2015 TAVASZ)

1. feladat. Fejezze be az 1.3. Tétel bizonyítását.

2. feladat. Számítsa ki kanonikus alakban:

$$\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 + i} = ?$$

3. feladat. Számítsa ki kanonikus alakban:

$$\frac{2 + 3i}{1 + 4i} = ?, \quad \frac{5 - 7i}{2 - i} = ?$$

4. feladat. Fejezze be az 1.11. Tétel bizonyítását.

5. feladat. Fejezze be az 1.15. Tétel bizonyítását.

6. feladat. Számítsa ki az alábbi komplex számokat, ahol $u = 2 - 3i$ és $v = 1 + i$:

$$u\bar{v} + \bar{u}v, \quad \frac{\bar{u}}{v} + \frac{u}{\bar{v}}, \quad |uv|, \quad \left| \frac{u}{v} \right|$$

7. feladat. Ábrázolja a Gauss-féle számsíkon az alábbi számhalmazokat:

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(z + 3) < 1\}, \quad \{z \in \mathbb{C} : |iz - i| = 1\}.$$

8. feladat. Ábrázolja a Gauss-féle számsíkon az alábbi számhalmazokat:

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(iz) = 2\}, \quad \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(\bar{z} - i) > 1\}, \quad \{z \in \mathbb{C} : |\bar{z} + 2 - i| \leq 2\}, \quad \{z \in \mathbb{C} : |iz - 1 - i| > 1\}$$

9. feladat. Számítsa ki trigonometrikus alakban:

$$\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 + i} = ?$$

10. feladat. Számítsa ki trigonometrikus és kanonikus alakban is:

$$(3 - \sqrt{3}i)(2 - 2i) = ?, \quad \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{\sqrt{3} + i} = ?$$

11. feladat. Számítsa ki trigonometrikus alakban, és adja meg a végeredményt kanonikus alakban is:

$$(-1 + i)^{2422} = ?$$

12. feladat. Számítsa ki trigonometrikus alakban, és adja meg a végeredményt kanonikus alakban is:

$$(\sqrt{3} + i)^{1208} = ?, \quad (2 + 2\sqrt{3}i)^{605} = ?$$

13. feladat. Ábrázolja a Gauss-féle számsíkon az alábbi számhalmazt:

$$\{z \in \mathbb{C} : \arg(z + zi) = \pi\}$$

14. feladat. Ábrázolja a Gauss-féle számsíkon az alábbi számhalmazokat:

$$\left\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \arg(zi) < \frac{\pi}{3}\right\}, \quad \left\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{6} < \arg(\bar{z}) \leq \frac{\pi}{4}\right\}$$

15. feladat. Számítsa ki trigonometrikus alakban, és adja meg a végeredményt kanonikus alakban is:

$$\sqrt[3]{-2 + 2i} = ?$$

16. feladat. Számítsa ki trigonometrikus alakban, és adja meg a végeredményt kanonikus alakban is:

$$\sqrt[3]{i} = ?, \quad \sqrt[4]{-1 - \sqrt{3}i} = ?, \quad \sqrt[6]{64} = ?, \quad \sqrt[6]{-27} = ?$$

17. feladat. Írja és rajzolja fel a 6. egységgyököket, és mindegyikről állapítsa meg, hogy hányadik primitív egységgyök.

18. feladat. Írja és rajzolja fel a 8. és a 12. egységgyököket, és mindegyikről állapítsa meg, hogy hányadik primitív egységgyök.

19. feladat. Egységgyök-e a következő komplex számok, és ha igen, akkor hányadik primitív egységgyökök?

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad \operatorname{cis} \frac{5\pi}{12}$$

20. feladat. Egységgyök-e a következő komplex számok, és ha igen, akkor hányadik primitív egységgyökök?

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \operatorname{cis} \frac{6\pi}{7}, \quad \operatorname{cis} \frac{7\pi}{10}$$

21. feladat. Az alábbi halmazok közül melyek alkotnak gyűrűt a szokásos összeadás és szorzás műveletével?

$$\mathbb{C}, \quad \mathbb{R}, \quad \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Z}, \quad \mathbb{R}^+, \quad \mathbb{Q}^+, \quad \mathbb{N}, \quad \{\text{páros számok}\}, \quad \{\text{páratlan számok}\}, \\ \{\text{irracionális számok}\}, \quad \{\text{véges tizedestörtek}\}, \quad \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$$

22. feladat. A 21. feladatbeli halmazok közül melyek alkotnak integritástartományt a szokásos összeadás és szorzás műveletével?

23. feladat. A 21. feladatbeli halmazok közül melyek alkotnak testet a szokásos összeadás és szorzás műveletével?

24. feladat. Az alábbi számhalmazok közül melyek alkotnak gyűrűt, integritástartományt, illetve testet a szokásos összeadás és szorzás műveletével?

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}, \quad \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}, \quad \mathbb{Q}(i) = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Q}\}, \\ \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z} \text{ és } a \text{ páros}\}, \quad \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z} \text{ és } b \text{ páros}\}, \quad \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z} \text{ és } a \text{ is és } b \text{ is páros}\}, \\ \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z} \text{ és } a \equiv b \pmod{2}\}, \quad \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z} \text{ és } a \equiv b \pmod{3}\}$$

25. feladat. Fejezze be a 2.30. Tétel bizonyítását.

26. feladat. Határozza meg az alábbi két polinom legnagyobb közös osztóját:

$$f = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 3, \quad g = x^3 + x^2 + x - 3.$$

27. feladat. Oldja meg az $fu + gv = \text{lko}(f, g)$ egyenletet az $\mathbb{R}[x]$ polinomgyűrűben, ahol

$$f = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 3, \quad g = x^3 + x^2 + x - 3.$$

28. feladat. Oldja meg az $fu + gv = \bar{1}$ egyenletet az $\mathbb{Z}_5[x]$ polinomgyűrűben, ahol

$$f = x^2 + \bar{3}x + \bar{1}, \quad g = x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{4}x + \bar{2}.$$

29. feladat. Határozza meg f és g legnagyobb közös osztóját, oldja meg az $fu + gv = \text{lko}(f, g)$ egyenletet, és számítsa ki f és g komplex gyökeit, ahol

$$f = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2, \quad g = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2.$$

30. feladat. Határozza meg f és g legnagyobb közös osztóját, oldja meg az $fu + gv = \text{lko}(f, g)$ egyenletet, és számítsa ki f és g komplex gyökeit, ahol

$$f = x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x - 3, \quad g = x^4 + x^3 + x^2 + 3x - 6.$$

31. feladat. Oldja meg az $fu + gv = \text{lko}(f, g)$ egyenletet $\mathbb{Z}_2[x]$ -ben:

$$f = x^4 + x^3 + x^2 + \bar{1}, \quad g = x^3 + \bar{1}.$$

32. feladat. Oldja meg az $fu + gv = \text{lko}(f, g)$ egyenletet $\mathbb{Z}_2[x]$ -ben:

$$f = x^4 + x^3 + x, \quad g = x^4 + x^2 + x.$$

33. feladat. Oldja meg az $fu + gv = \bar{1}$ egyenletet $\mathbb{Z}_7[x]$ -ben:

$$f = x^4 + \bar{6}x^3 + \bar{3}x^2 + \bar{2}x + \bar{4}, \quad g = x^2 + \bar{6}x + \bar{3}.$$

34. feladat. Oldja meg az $fu + gv = \bar{1}$ egyenletet $\mathbb{Z}_5[x]$ -ben:

$$f = x^3 + \bar{4}x, \quad g = \bar{2}x^2 + \bar{3}x + \bar{2}.$$

35. feladat. Oldja meg az $f \cdot u \equiv \bar{1} \pmod{m}$ konruenciát a $\mathbb{Z}_5[x]$ polinomgyűrűben, ahol

$$f = x^2 + \bar{3}x + \bar{1}, \quad m = x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{4}x + \bar{2}.$$

36. feladat. Oldja meg az $f \cdot u \equiv \bar{1} \pmod{m}$ konruenciát a $\mathbb{Z}_2[x]$ polinomgyűrűben, ahol

$$f = x^2 + \bar{1}, \quad m = x^3 + x^2 + \bar{1}.$$

37. feladat. Határozza meg az $\bar{f} \in \mathbb{Z}_5[x]/(m)$ maradékosztály multiplikatív inverzét, ahol

$$f = x^2 + \bar{3}x + \bar{1}, \quad m = x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{4}x + \bar{2}.$$

38. feladat. Határozza meg az $\bar{f} \in \mathbb{Z}_2[x]/(m)$ maradékosztály multiplikatív inverzét, ahol

$$f = x^2 + 1 \quad m = x^3 + x^2 + 1.$$

39. feladat. Számítsa ki a $\mathbb{Z}_5[x]/(x^3 + x + 1)$ gyűrűben $\overline{3x^2 + 2}$ multiplikatív inverzét.

40. feladat. Számítsa ki a $\mathbb{Z}_5[x]/(x^3 + x^2 + x + 1)$ gyűrűben $\overline{2x^2 + 4}$ multiplikatív inverzét.

41. feladat. Számítsa ki a $\mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x^2 + 1)$ gyűrűben $\overline{x^2}$ multiplikatív inverzét.

42. feladat. Számítsa ki a $\mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x + 1)$ gyűrűben \bar{x} multiplikatív inverzét.

43. feladat. Határozza meg azt a legalacsonyabb fokszámú $f \in \mathbb{R}[x]$ polinomot, amelyre

$$f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 8.$$

44. feladat. Határozza meg azt a legalacsonyabb fokszámú $f \in \mathbb{R}[x]$ polinomot, amelyre

$$f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 4, f(4) = 3.$$

45. feladat. Határozza meg azt a legalacsonyabb fokszámú $f \in \mathbb{R}[x]$ polinomot, amelyre

$$f(-1) = 10, f(0) = 5, f(1) = 3, f(2) = 4.$$

46. feladat. Fejezze be a 3.38. Tétel bizonyítását.

47. feladat. Hányszoros gyöke $c = 1$ az $f = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ polinomnak?

48. feladat. Hányszoros gyöke $c = 2$ az $f = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ polinomnak?

49. feladat. Hányszoros gyöke $c = -2$ az $f = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$ polinomnak?

50. feladat. Számítsa ki az $f = x^4 + 4ix^3 - 7x^2 - 6ix - 4$ polinom komplex gyökeit az $y = x + i$ határozatlanra való áttérés segítségével.

51. feladat. Számítsa ki az $f = x^4 - 4ix^3 - 3x^2 - 2ix - 12$ polinom komplex gyökeit az $y = x - i$ határozatlanra való áttérés segítségével.

52. feladat. Számítsa ki az $f = x^4 + 8ix^3 - 26x^2 - 40ix + 21$ polinom komplex gyökeit az $y = x + 2i$ határozatlanra való áttérés segítségével.

53. feladat. Bontsa irreducibilis tényezők szorzatára az alábbi polinomot:

$$f = x^6 + 3x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 1 \in \mathbb{Z}_5[x].$$

54. feladat. Bontsa irreducibilis tényezők szorzatára az alábbi polinomot:

$$x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x].$$

55. feladat. Bontsa irreducibilis tényezők szorzatára az alábbi polinomot:

$$x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x].$$

56. feladat. Bontsa irreducibilis tényezők szorzatára az alábbi polinomot:

$$x^5 + x^4 + 2x^3 + 1 \in \mathbb{Z}_5[x].$$

57. feladat. Bontsa irreducibilis tényezők szorzatára az alábbi polinomot:

$$x^5 + x^3 + 4x^2 + 4 \in \mathbb{Z}_5[x].$$

58. feladat. Határozza meg \mathbb{Z}_2 felett az összes legfeljebb harmadfokú irreducibilis polinomot.

59. feladat. Bontsa irreducibilis tényezők szorzatára az alábbi polinomokat:

$$x^4 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x], \quad x^4 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x].$$

60. feladat. Határozza meg az $f = x^6 - 27$ polinom irreducibilis felbontását \mathbb{C} és \mathbb{R} felett.

61. feladat. Határozza meg az $f = x^6 + 1$ polinom irreducibilis felbontását \mathbb{C} és \mathbb{R} felett.

62. feladat. Határozza meg az $f = x^8 - 16$ polinom irreducibilis felbontását \mathbb{C} és \mathbb{R} felett.

63. feladat. Határozza meg az $f = x^4 - x^2 + 1$ polinom irreducibilis felbontását \mathbb{C} és \mathbb{R} felett.

64. feladat. Határozza meg az $f = x^6 + 7x^3 - 8$ polinom irreducibilis felbontását \mathbb{C} és \mathbb{R} felett.

65. feladat. Határozza meg az $f = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ polinom irreducibilis felbontását \mathbb{C} és \mathbb{R} felett.

66. feladat. Bontsa \mathbb{Q} felett irreducibilis polinomok szorzatára az alábbi polinomot:

$$f = 2x^7 + 5x^6 + 4x^5 + 13x^4 + 54x^3 + 84x^2 + 54x + 12.$$

67. feladat. Bontsa \mathbb{Q} felett irreducibilis polinomok szorzatára az alábbi polinomot:

$$f = 3x^{100} - 10x^{50} + 100x - 50.$$

68. feladat. Bontsa \mathbb{Q} felett irreducibilis polinomok szorzatára az alábbi polinomot:

$$f = 4x^4 - 7x^2 - 5x - 1.$$

69. feladat. Bontsa \mathbb{Q} felett irreducibilis polinomok szorzatára az alábbi polinomot:

$$3x^6 + 2x^5 - 7x^4 + 2.$$

70. feladat. Bontsa \mathbb{Q} felett irreducibilis polinomok szorzatára az alábbi polinomot:

$$2x^6 - x^5 + 15x + 12.$$

71. feladat. Bontsa \mathbb{Q} felett irreducibilis polinomok szorzatára az alábbi polinomot:

$$x^5 - 2x^3 + x^2 + x - 1.$$

72. feladat. Bontsa \mathbb{Q} felett irreducibilis polinomok szorzatára az alábbi polinomot:

$$x^5 - x^4 - x^3 + 2x^2 - 1.$$

73. feladat. Bontsa \mathbb{Q} felett irreducibilis polinomok szorzatára az alábbi polinomot:

$$x^6 - x^5 - 2x^3 - 3x^2 - x - 2.$$

74. feladat. Bontsa \mathbb{Q} felett irreducibilis polinomok szorzatára az alábbi polinomot:

$$x^6 + x^5 + 2x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 4x - 8.$$

75. feladat. Írja fel a $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + x + 1)$ négyelemű test összeadó- és szorzótábláját.

76. feladat. Hány elemű a $\mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x^2 + 1)$ gyűrű? Test-e ez a gyűrű?

77. feladat. Hány elemű a $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2 + 1)$ gyűrű? Test-e ez a gyűrű?

78. feladat. Hány elemű a $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 1)$ gyűrű? Test-e ez a gyűrű?

79. feladat. Hány elemű a $\mathbb{Z}_3[x]/(x^3 + x^2 + 1)$ gyűrű? Test-e ez a gyűrű?

80. feladat. Hány elemű a $\mathbb{Z}_5[x]/(x^3 + 2)$ gyűrű? Test-e ez a gyűrű?

81. feladat. Hány elemű a $\mathbb{Z}_7[x]/(x^2 + 2)$ gyűrű? Test-e ez a gyűrű?

82. feladat. Számítsa ki a $\mathbb{Z}_3[x]/(x^3 - x + 1)$ testben az alábbi hányadosokat:

$$\overline{1/2x^2 + 1} = ?, \quad \overline{x/x + 1} = ?$$

83. feladat. Számítsa ki a $\mathbb{Z}_3[x]/(x^3 - x^2 + x + 1)$ testben az alábbi hányadosokat:

$$\overline{1/x + 1} = ?, \quad \overline{x^2/x - 1} = ?.$$

84. feladat. Számítsa ki a $\mathbb{Z}_3[x]/(x^3 + x^2 - x + 1)$ testben az alábbi hányadosokat:

$$\overline{1/x} = ?, \quad \overline{x/x - 1}.$$

85. feladat. Határozza meg a $K = \mathbb{Q}[x]/(x^3 - 7)$ testben a $\overline{2 - x}$ elem multiplikatív inverzét.

86. feladat. Határozza meg a $\mathbb{Q}[x]/(x^3 - 2)$ testben az $\overline{x^2 + 3x + 4}$ elem multiplikatív inverzét, majd gyöktelenítse ennek segítségével a következő tört nevezőjét:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4 + 3\sqrt{2} + 4}}.$$

87. feladat. Határozza meg a $\mathbb{Q}[x]/(x^3 - 5)$ testben az $\overline{x^2 + 3x - 2}$ elem multiplikatív inverzét, majd gyöktelenítse ennek segítségével a következő tört nevezőjét:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{25 + 3\sqrt{5} - 2}}.$$

88. feladat. Fejezze be a 3.72. Tétel bizonyítását.

89. feladat. A derivált vizsgálatával határozza meg az $f = x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4$ polinom többszörös gyökeit, majd az összes gyökét (multiplicitással együtt).

90. feladat. A derivált vizsgálatával határozza meg az $f = 3x^4 - 4x^3 + 1$ polinom többszörös gyökeit, majd az összes gyökét (multiplicitással együtt).

91. feladat. A derivált vizsgálatával határozza meg az alábbi $f = x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4$ polinom többszörös gyökeit, majd az összes gyökét (multiplicitással együtt).

92. feladat. Mutassa meg, hogy az $ax^2 + bx + c$ polinom diszkriminánsa $a^2(\alpha_1 - \alpha_2)^2 = b^2 - 4ac$.

93. feladat. Fejezze ki az $f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ polinomot az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

94. feladat. Anélkül, hogy megkeresné a gyököket, határozza meg az $f = x^3 - 3x^2 + x - 8$ polinom gyökeinek köbösszegét, valamint számtani, mértani és harmonikus közepét.

95. feladat. Fejezze ki az $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ polinomot az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

96. feladat. Anélkül, hogy megkeresné a gyököket, határozza meg az $f = 2x^3 + 4x^2 - 6x + 2$ polinom gyökeinek negyedik hatványösszegét.

97. feladat. Fejezze be az 5.9. Állítás bizonyítását.

98. feladat. Fejezze be az 5.12. Állítás bizonyítását.

99. feladat. Fejezze be az 5.30. Tétel bizonyítását.

100. feladat. Fejezze be az 5.42. Tétel bizonyítását.