

1. **feladat.** Határozza meg a $3 - 4i$ komplex szám négyzetgyökeit kanonikus alakban.
2. **feladat.** Oldja meg a $(2 + i)x^2 + (5 - i)x + (2 - 2i) = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán.
3. **feladat.** Oldja meg a $z^2 + 4\bar{z} = |z|^2 + 6$ egyenletet a komplex számok halmazán.
4. **feladat.** Mekkora szöget zárnak be egymással az origót a $(2, 1)$ és az $(1, 3)$ ponttal összekötő szakaszok?
5. **feladat.** Rajzoljunk egy paralelogramma oldalaira kifelé négyzeteket. Bizonyítsa be, hogy a négyzetek középpontjai egy négyzetet alkotnak.
6. **feladat.** Ábrázolja a komplex számsíkon a $\{z^2 : \operatorname{Re} z = 1\}$ halmazt.
7. **feladat.** Adjon zárt formulát a $\binom{2015}{1} - \binom{2015}{3} + \binom{2015}{5} - \binom{2015}{7} + \dots - \binom{2015}{2015}$ összegre. (Útmutatás: Számítsa ki az $(1 + i)^{2015}$ hatványt trigonometrikus és kanonikus alakban is, majd hasonlítsa össze a két eredményt.)
8. **feladat.** Határozza meg mindazokat a komplex számokat, amelyek hetvenhatodik és századik egységgyökök is.
9. **feladat.** Határozza meg az n -edik egységgyökök szorzatát.
10. **feladat.** Ha ε primitív századik egységgyök, akkor primitív hányadik egységgyök ε^{35} és ε^{36} ?
11. **feladat.** Definiáljuk az egész számok halmazán a $*$ műveletet a következőképpen: $a * b := a + (-1)^a b$. Mutassa meg, hogy $(\mathbb{Z}; *)$ félcsoport. Van-e benne egységelem; ha igen, mely elemeknek van inverze?
12. **feladat.** Gyűrűt, integritástartományt, illetve testet alkot-e a $\mathbb{Z}[\omega] = \{a + b\omega : a, b \in \mathbb{Z}\}$ halmaz (a szokásos összeadással és szorzással), ahol $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$?
13. **feladat.** Határozza meg a $\mathbb{Z}[\omega]$ gyűrű egységeit (lásd az előző feladatot).
14. **feladat.** Definiáljunk egy újfajta összeadást és egy újfajta szorzást a valós számok halmazán: legyen $a \oplus b = a + b - 1$ és $a \odot b = a + b - ab$. Igazolja, hogy az $(\mathbb{R}; \oplus, \odot)$ struktúra test.
15. **feladat.** Számítsa ki az $(x + \bar{1})^p \in \mathbb{Z}_p[x]$ polinomban x, x^2, x^3 és x^4 együtthatóját.
16. **feladat.** Határozza meg $x^{100} - 1$ és $x^{44} - 1$ legnagyobb közös osztóját.
17. **feladat.** Mely p prímszámok esetén létezik multiplikatív inverze az $x - \bar{1} \in \mathbb{Z}_p[x]$ polinomnak modulo $x^3 + x + \bar{1}$? Számítsa is ki a multiplikatív inverzet, amikor létezik.
18. **feladat.** Bézout tételének segítségével vizsgálja meg, hogy teljesül-e az $x^2 + \sqrt{2}x + 1 \mid x^4 + 1$ oszthatóság.
19. **feladat.** Mely n pozitív egészekre osztható az $x^n + 1$ polinom az $x^2 + 1$ polinommal?
20. **feladat.** Mutassa meg, hogy a $(0, a_0), (1, a_1), (2, a_2), (3, a_3)$ pontokra akkor és csak akkor illeszthető parabola (amely elfajuló esetben lehet egyenes is), ha $a_0 - 3a_1 + 3a_2 - a_3 = 0$.
21. **feladat.** Az a valós paraméter mely értékeire lesz a -1 kétszeres gyöke az $x^5 - ax^2 - ax + 1$ polinomnak?
22. **feladat.** Adja meg az $x^5 + \bar{6}x^4 + x^3 + \bar{6}x^2 + \bar{2}x + \bar{5} \in \mathbb{Z}_7[x]$ polinom irreducibilis felbontását.
23. **feladat.** Adja meg az $x^p - x \in \mathbb{Z}_p[x]$ polinom irreducibilis felbontását tetszőleges p prímszám esetén.
24. **feladat.** Képzeld el (de ne írja fel!) az $x^{1973} - 1997$ polinom irreducibilis felbontását \mathbb{R} felett. Hány tényezőt lát (a lelki szemeivel), és hányadfokúak ezek?
25. **feladat.** Adjon meg végtelen sok olyan n egész számot, melyre az $x^2 + 100x + n$ polinom irreducibilis \mathbb{Q} felett, és végtelen sok olyat is, amelyre nem irreducibilis.
26. **feladat.** Írja fel az $f = (x - 1)(x^2 - 1)(x^3 - 1)(x^4 - 1)$ és $g = (x + 1)(x^2 + 1)(x^3 + 1)(x^4 + 1)$ polinomok irreducibilis felbontását a kedvenc számteste felett, majd számítsa ki f és g legnagyobb közös osztóját.
27. **feladat.** Adja meg az $x^5 + x^3 + ax^2 + a \in T[x]$ polinom irreducibilis felbontását, ahol $T = \{0, 1, a, b\}$ a 4-elemű test.
28. **feladat.** Mely p prímszámok esetén lesz test a $\mathbb{Z}_p[x] / (x^2 + 1)$ faktorgyűrű?
29. **feladat.** Határozza meg az a, b paraméterek értékét úgy, hogy legyen háromszoros gyöke a $3x^5 - 10x^3 + ax + b \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak.
30. **feladat.** Mikor osztható egy polinom a saját deriváltjával?
31. **feladat.** Oldja meg az $x^3 + 9x - 26 = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán.
32. **feladat.** Oldja meg az $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 3 = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán. (Segítség: A kubikus rezolvens egyik gyöke $\alpha = 2$.)
33. **feladat.** Határozza meg a λ komplex paraméter értékét úgy, hogy az $x^3 - 7x + \lambda$ polinom egyik gyöke valamelyik másik gyök kétszerese legyen.
34. **feladat.** Határozza meg a $8 + i$ és $4 - 2i$ Gauss-egészek legnagyobb közös osztóját.