KLASSZIKUS ALGEBRA SZORGALMI FELADATOK (2015 TAVASZ, csütörtök 8–10)

1. feladat. Határozza meg az $5+12i$ komplex szám négyzetgyökeit kanonikus alakban.

2. feladat. Oldja meg az $(1-2i)\,x^2+(3+i)\,x+i=0$ egyenletet a komplex számok halmazán.

3. feladat. Oldja meg az $i\bar{z}=z^2$ egyenletet a komplex számok halmazán.

4. feladat. Bizonyítsa be, hogy $\operatorname{arctg} 1+\operatorname{arctg} 2+\operatorname{arctg} 3=\pi$.

5. feladat. Rajzoljunk az ABC háromszög AC oldalára kifelé egy négyzetet; ennek A-val szomszédos csúcsai legyenek C és D. Hasonlóképpen, a BC oldalra rajzolt négyzet B-vel szomszédos csúcsai C és E. Mutassa meg, hogy ha a háromszög C csúcsát mozogatjuk (de az AB oldal fix), akkor a DE szakasz felezőpontja helyben marad.

6. feladat. Ábrázolja a komplex számsíkon a $\left\{z\colon\ \operatorname{Re}\frac{1}{z}=1\right\}$ halmazt.

7. feladat. Fejezze ki $\cos(2015x)$-et $\cos x$ és $\sin x$ segítségével. (Útmutatás: Számítsa ki a $(\operatorname{cis} x)^{2015}$ hatványt trigonometrikus és kanonikus alakban is, majd hasonlítsa össze a két eredményt.)

8. feladat. Ha ε primitív hetvenhatodik egységgyök, akkor mennyi lehet ε^{2014}?

9. feladat. Mennyi az n-edik egységgyökök 2015-ödik hatványainak összege?

10. feladat. Mikor lehet ε és $\varepsilon+1$ is egységgyök?

11. feladat. Definiáljuk a valós számpárok halmazán a $*$ műveletet a következőképpen: $(a,b)*(c,d):=(ac,bc+d)$. Mutassa meg, hogy $(\mathbb{R}\times\mathbb{R};*)$ félcsoport. Van-e benne egységelem; ha igen, mely elemeknek van inverze?

12. feladat. Legyen $U=\{a,b,c\}$, és legyen $\mathcal{P}(U)$ az U halmaz hatványhalmaza. Gyűrűt, integritástartományt, illetve testet alkot-e $\mathcal{P}(U)$ a szimmetrikus differencia és a metszés műveletével?

13. feladat. Határozza meg a véges tizedestörtek gyűrűjének egységeit.

14. feladat. Bizonyítsa be, hogy az $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ alakú valós mátrixok testet alkotnak a szokásos mátrixműveletekkel.

15. feladat. Számítsa ki az $\left(x-\overline{1}\right)\left(x-\overline{2}\right)\cdots\left(x-\overline{p-1}\right)\in\mathbb{Z}_p[x]$ polinomban x^{p-1}, x^{p-2}, x^{p-3} és x^0 együtthatóját.

16. feladat. Oldja meg az $\left(x^3+x^2\right)u+\left(x^3+x^2+x\right)v+\left(x^3+\overline{1}\right)w=\overline{1}$ egyenletet a $\mathbb{Z}_2[x]$ polinomgyűrűben.

17. feladat. Mely p prímszámok esetén létezik multiplikatív inverze az $x-\overline{2}\in\mathbb{Z}_p[x]$ polinomnak modulo $x^2+x+\overline{1}$? Számítsa is ki a multiplikatív inverzet, amikor létezik.

18. feladat. Bézout tételének segítségével vizsgálja meg, hogy teljesül-e a $g\mid f$ oszthatóság a $g=x^2-1$ és $f=x^{17}-x^{16}+x^{15}-x^{14}+x^7-x^3+x-1$ polinomokra a $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_3$, illetve $\mathbb{Z}_7$ testek fölött.

19. feladat. Mely n pozitív egészekre osztható az $x^{2n}+x^n+1$ polinom az x^2+x+1 polinommal?

20. feladat. Legyen f a $\left(k,(-1)^k\right)$, $k=0,\dots,9$ pontokra illesztett interpolációs polinom. Mennyi $f(10)$ értéke?

21. feladat. Az a valós paraméter mely értékeire lesz az 1 kétszeres gyöke az $x^5+3ax^4-4ax^3-5x+1$ polinomnak?

22. feladat. Adja meg az $x^5+\overline{3}x^4+x^3+\overline{3}x^2+\overline{4}x+\overline{2}\in\mathbb{Z}_5[x]$ polinom irreducibilis felbontását.

23. feladat. Hány másodfokú irreducibilis polinom van $\mathbb{Z}_p[x]$-ben?

24. feladat. Képzelje el (de ne írja fel!) az $x^{100}-1$ és x^8-1 polinomok gyöktényezős alakját, majd határozza meg ennek segítségével a legnagyobb közös osztójukat.

25. feladat. Mely p prímszámok esetén van racionális gyöke az $x^4+2x^3-16x^2+2x+p$ polinomnak?

26. feladat. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges T test és tetszőleges $a_0,\dots,a_n\in T$, $a_0,a_n\neq 0$ elemek esetén az $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in T[x]$ polinom akkor és csak akkor irreducibilis, ha $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ is az.

27. feladat. Határozza meg a 121-elemű test összes elemének összegét.

28. feladat. Mely p prímszámok esetén lesz test a $\mathbb{Z}_p[x]\,/\left(x^2-2\right)$ faktorgyűrű?

29. feladat. Határozza meg az A,B paraméterek azon értékeit, amelyekre az 1 kétszeres gyöke az $Ax^n+Bx^{n-1}+1\in\mathbb{C}[x]$ polinomnak ($n\geq 2$ tetszőleges adott természetes szám).

30. feladat. Mutassa meg, hogy az $1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$ polinomnak nincs többszörös gyöke a komplex számok testében.

31. feladat. Oldja meg az $x^3-9x+28=0$ egyenletet a komplex számok halmazán.

32. feladat. Oldja meg az $x^4-4x^3+3x^2+2x-1=0$ egyenletet a komplex számok halmazán. (Segítség: A kubikus rezolvens egyik gyöke $\alpha=0$.)

33. feladat. Határozza meg a p és q komplex paraméterek értékét úgy, hogy az $x^3-px^2+11x-q$ polinom gyökei egymást követő egész számok legyenek.

34. feladat. Határozza meg a $7-4i$ és $1+3i$ Gauss-egészek legnagyobb közös osztóját.