KLASSZIKUS ALGEBRA KIEMELT GYAKORLAT (2014 TAVASZ)

6. Polinomok III

6.1. feladat. (1 pont)
Hányszoros gyöke a 2 szám az $x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ polinomnak? Oldja meg a feladatot Horner-elrendezéssel és deriválással is.

6.2. feladat. (2 pont)
Határozza meg a $3x^4 - 4x^3 + 1$ polinom többszörös gyökeit, majd adja meg a gyöktényezős felbontását.

6.3. feladat. (2 pont)
Határozza meg az A, B valós paraméterek azon értékeit, amelyekre az 1 kétszeres gyöke az $Ax^n + Bx^{n-1} + 1$ polinomnak ($n \geq 2$ tetszőleges adott természetes szám).

6.4. feladat. (2 pont)
Határozza meg a b és c komplex paraméterek értékét úgy, hogy legyen háromszoros gyöke az $x^5 - 5x^3 + 5bx + c \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak.

6.5. feladat. (2 pont)
Mikor osztható egy polinom a saját deriváltjával?

6.6. feladat. (2 pont)
Mutassa meg, hogy az $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ polinomnak nincs többszörös gyöke a komplex számok testében.

6.7. feladat. (3 pont)
Legyenek az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom komplex gyökei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Tegyük fel, hogy a gyökök páronként különbözők, és egy konvex n-szöget alkotnak a komplex számsíkon. Bizonyítsa be, hogy f' gyökei csak ennek a sokszögnek a belsejében vagy a határán helyezkedhetnek el.

6.8. feladat. (1 pont)
Oldja meg az $x^3 + 9x - 26 = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán.

6.9. feladat. (2 pont)
Oldja meg az $x^3 + 9x - 26 = 0$ egyenletet a $\mathbb{Z}_{19}$ testben (de ne próbálgatással!). (A megoldáshoz szükségünk lehet a 2.16. feladatra.)

6.10. feladat. (1 pont)
Oldja meg az $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 3 = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán. (Segítség: A kubikus rezolvens egyik gyöke $\alpha = 2$.)

6.11. feladat. (2 pont)
Anélkül, hogy megkeresné a gyököket, határozza meg a $3x^5 + 6x^4 + 9x^3 + 2x^2 + 4x + 1$ polinom gyökeinek számtani, mértani és harmonikus közepét.

6.12. feladat. (1 pont)
Írja fel az $(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_1)$ polinom tagjait lexikografikusan csökkenő sorrendben, majd fejezze ki az elemi szimmetrikus polinomok segítségével.

6.13. feladat. (2 pont)
Határozza meg a λ komplex paraméter értékét úgy, hogy az $x^3 - 7x + \lambda$ polinom egyik gyöke valamelyik másik gyök kétszerese legyen.

6.14. feladat. (2 pont)
Határozza meg a p és q komplex paraméterek értékét úgy, hogy az $x^3 - px^2 + 11x - q$ polinom gyökei egymást követő egész számok legyenek.

6.15. feladat. (2 pont)
Határozza meg a $\sqrt{3 - \sqrt{6}}$ algebrai szám minimálpolinomját és a minimálpolinom gyökeit.

6.16. feladat. (2 pont)
Mutassa meg, hogy $\pi^2 + \pi$ transzcendens szám. (Fel lehet használni azt a tényt, hogy π transzcendens.)

6.17. feladat. (2 pont)
Határozza meg a $8 + i$ és $4 - 2i$ Gauss-egészek legnagyobb közös osztóját.

6.18. feladat. (3 pont)
Mutassa meg, hogy $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-2}\right] = \left\{a + b\sqrt{-2}\colon a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ euklideszi gyűrű, de $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-3}\right]$ nem az.

6.19. feladat. (2 pont)
Határozza meg az $x^2 + 2 = y^3$ egyenlet összes megoldását az egész számok körében. (Útmutatás: számoljunk a $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-2}\right]$ gyűrűben, amelyben az előző feladat szerint létezik egyértelmű irreducibilis faktorizáció. Ebből következik, hogy ebben a gyűrűben két relatív prím elem szorzata csak úgy lehet „köbszám”, ha mindkettő köbszám.)