KLASSZIKUS ALGEBRA KIEMELT GYAKORLAT (2014 TAVASZ)

5. Polinomok II

5.1. feladat. (1 pont)
Írja fel a $\mathbb{Z}_2[x] / \left(x^2+x+1\right)$ négyelemű test összeadó- és szorzótábláját.

5.2. feladat. (1 pont)
Határozza meg a $\mathbb{Z}_5[x] / \left(x^3+1\right)$ százhuszonötelemű testben a $\overline{2x^2-3x+2}$ elem reciprokát.

5.3. feladat. (2 pont)
Gyöktelenítse az $1/\left(4+3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)$ tört nevezőjét.

5.4. feladat. (2 pont)
Határozza meg a 121-elemű test összes elemének összegét. Hogyan lehetne általánosítani a feladatot?

5.5. feladat. (1 pont)
Adja meg az $x^5+x+\overline{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$ és $x^4+\overline{2}x^3+\overline{1} \in \mathbb{Z}_3[x]$ polinomok irreducibilis felbontását.

5.6. feladat. (2 pont)
Igazolja, hogy a $273x^5+112x^3-547x^2+58x+15$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.

5.7. feladat. (3 pont)
Bizonyítsa be, hogy x^4+1 irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, de egyetlen p prímszámra sem irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ felett.

5.8. feladat. (2 pont)
Adja meg az $x^5+x^3+ax^2+a \in T[x]$ polinom irreducibilis felbontását, ahol $T=\{0,1,a,b\}$ a négyelemű test.

5.9. feladat. (2 pont)
Adja meg az $x^p-x \in \mathbb{Z}_p[x]$ polinom irreducibilis felbontását tetszőleges p prímszám esetén.

5.10. feladat. (1 pont)
Határozza meg az x^8-81 polinom komplex gyökeit, majd bontsa irreducibilis tényezők szorzatára $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ és $\mathbb{Q}$ felett.

5.11. feladat. (1 pont)
Határozza meg az x^7+7x^4-8x polinom komplex gyökeit, majd bontsa irreducibilis tényezők szorzatára $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ és $\mathbb{Q}$ felett.

5.12. feladat. (2 pont)
Határozza meg az $f=(x-1)\left(x^2-1\right)\left(x^3-1\right)\left(x^4-1\right)$ és $g=(x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^3+1\right)\left(x^4+1\right)$ polinomok irreducibilis faktorizációját a kedvenc számteste felett, majd ennek segítségével számítsa ki f és g legnagyobb közös osztóját.

5.13. feladat. (2 pont)
Képzelje el (de ne írja fel!) az $x^{1973}-1997$ polinom irreducibilis felbontását $\mathbb{R}$ felett. Hány tényezőt lát (a lelki szemeivel), és hányadfokúak ezek?

5.14. feladat. (1 pont)
Keresse meg az $x^6+2x^5+x^4+22x^3+55x^2+44x+11$ polinom racionális gyökeit, majd adja meg a $\mathbb{Q}$ feletti irreducibilis felbontását.

5.15. feladat. (2 pont)
Mely p prímszámok esetén van racionális gyöke az $x^4+2x^3-16x^2+2x+p$ polinomnak?

5.16. feladat. (1 pont)
Igazolja, hogy az $x^7-7x^6+24x^5-50x^4+68x^3-57x^2+25x-1$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett. (Útmutatás: Térjünk át az $y=x-1$ határozatlanra.)

5.17. feladat. (2 pont)
Adja meg az $x^p-1 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom irreducibilis felbontását (p prímszám).

5.18. feladat. (2 pont)
Adjon meg végtelen sok olyan n egész számot, melyre az $x^2+100x+n$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, és végtelen sok olyat is, amelyre nem irreducibilis.

5.19. feladat. (3 pont)
Legyen $f \in \mathbb{Z}[x]$ egy olyan 101-edfokú polinom, amely legalább 101 egész számra ± 1 értéket vesz fel. Bizonyítsa be, hogy f irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett. (Útmutatás: használjuk Kronecker módszerét.)

5.20. feladat. (3 pont)
Legyen $f \in \mathbb{Z}[x]$ egy főpolinom, melynek konstans tagja nem nulla (azaz $f(0) \neq 0$). Tegyük fel, hogy f-nek egyetlen komplex gyöke van az egységkörön kívül, az összes többi gyöke pedig az egységkör belsejében helyezkedik el (tehát a körvonalon nincs egy gyök se). Bizonyítsa be, hogy f irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.

5.21. feladat. (2 pont)
Az előző feladat segítségével (vagy máshogy) mutassa meg, hogy x^4-x^3-1 irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett. (Nem kell a gyököket kiszámolni, elég megbecsülni az abszolút értéküket.)