KLASSZIKUS ALGEBRA KIEMELT GYAKORLAT (2014 TAVASZ)

3. Polinomok I

3.1. feladat. (1 pont)
Határozza meg az $f = x^4 + x^3 + x^2 + \overline{1}$, $g = x^3 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$ polinomok legnagyobb közös osztóját, és adja meg az $fu + gv = (f, g)$ egyenlet egy megoldását.

3.2. feladat. (1 pont)
Számítsa ki az $f = x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x - 3$, $g = x^4 + x^3 + x^2 + 3x - 6$ polinomok legnagyobb közös osztóját, majd ennek segítségével határozza meg f és g közös gyökeit, és végül külön-külön f és g összes gyökét.

3.3. feladat. (1 pont)
Oldja meg az $\mathbb{R}[x]$ polinomgyűrűben az $x^2 \cdot f \equiv x^2 - 2x \pmod{x^3 + x}$ kongruenciát.

3.4. feladat. (2 pont)
A *duális számokat* a komplex számokhoz hasonlóan definiáljuk, de itt a „képzetes egység” négyzete nem -1, hanem 0. Tehát $\mathbb{D} = \{a + b\varepsilon \colon a, b \in \mathbb{R}\}$, ahol ε egy olyan szimbólum, amelyre $\varepsilon^2 = 0$. (Mi lehet ennek az értelme? Miért pont ε-t használunk?) Mutassa meg, hogy a duális számok (a természetes módon definiált összeadással és szorzással) kommutatív egységelemes gyűrűt alkotnak. Határozza meg a $\mathbb{D}$ gyűrű zérusosztóit és egységeit.

3.5. feladat. (2 pont)
Igazolja, hogy a duális számokkal „ugyanúgy” kell számolni, mintha $\mathbb{R}$ feletti polinomokkal számolnánk modulo x^2. Tehát a $\mathbb{D}$ gyűrű és az $\mathbb{R}[x] / (x^2)$ gyűrű szerkezete „lényegében” egyforma (szaknyelven: izomorfak egymással).

3.6. feladat. (1 pont)
Bézout tételének segítségével vizsgálja meg, hogy osztja-e a $g = x^2 + \sqrt{2}x + 1$ polinom az $f = x^4 + 1$ polinomot.

3.7. feladat. (2 pont)
Határozza meg az összes olyan p prímszámot, amelyre $x^2 + \overline{1} \mid x^{2008} - \overline{23}x^{1922} + \overline{13}x^{600} + \overline{8}$ teljesül a $\mathbb{Z}_p[x]$ polinomgyűrűben.

3.8. feladat. (2 pont)
Az n természetes szám mely értékeire lesz $(x+1)^n - x^n - 1$ osztható $x^2 + x + 1$-gyel?

3.9. feladat. (2 pont)
Határozza meg az $x^n - 1$ és $x^m - 1$ polinomok legnagyobb közös osztóját.

3.10. feladat. (3 pont)
Határozza meg az egységkörbe írt szabályos n-szög egy csúcsából kiinduló átlói hosszának szorzatát. (Itt most átlónak tekintjük az oldalakat is, tehát egy csúcsból $n - 1$ átló indul ki.)

3.11. feladat. (1 pont)
Hányszoros gyöke a 2 szám az $x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ polinomnak?

3.12. feladat. (1 pont)
Alakítsa át az $f = x^4 + 8ix^3 - 26x^2 - 40ix + 21 \in \mathbb{C}[x]$ polinomot az $x + 2i$ polinom hatványai szerint rendezett alakba, és az elvégzett átalakítás segítségével határozza meg f gyökeit.

3.13. feladat. (2 pont)
Határozza meg azt a legalacsonyabb fokszámú f polinomot, amelyre $f(0) = 1$, $f(1) = 2$ és $f(2) = 4$. Hány részre osztja n általános helyzetű egyenes a síkot? Mi köze ennek a kettőnek egymáshoz?

3.14. feladat. (3 pont)
Mutassa meg, hogy

$$1 - x + \frac{x(x-1)}{2} - \frac{x(x-1)(x-2)}{6} + \cdots + (-1)^n \frac{x(x-1)\cdots(x-(n-1))}{n!} = (-1)^n \frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{n!}$$

3.15. feladat. (3 pont)
Legyenek $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ az n-edik egységgyökök, és legyen $f \in \mathbb{C}[x]$ az $(\varepsilon_0, y_0), (\varepsilon_1, y_1), \ldots, (\varepsilon_{n-1}, y_{n-1})$ pontokra illesztett Lagrange-féle interpolációs polinom. Igazolja, hogy $f(0)$ éppen az $y_0, \ldots, y_{n-1}$ számok átlaga.

3.16. feladat. (2 pont)
A $(0, a_0), (1, a_1), (2, a_2)$ pontokra akkor és csak akkor illeszthető egyenes, ha $a_0 - 2a_1 + a_2 = 0$ (ugye?). Mutassa meg, hogy a $(0, a_0), (1, a_1), (2, a_2), (3, a_3)$ pontokra akkor és csak akkor illeszthető parabola (amely elfajuló esetben lehet egyenes is), ha $a_0 - 3a_1 + 3a_2 - a_3 = 0$.

3.17. feladat. (3 pont)
Az előző feladat általánosításaként bizonyítsa be, hogy a $(0, a_0), (1, a_1), \ldots, (n+1, a_{n+1})$ pontok akkor és csak akkor illeszkednek egy legfeljebb n-edfokú polinomfüggvény grafikonjára, ha

$$\binom{n+1}{0} a_0 - \binom{n+1}{1} a_1 + \binom{n+1}{2} a_2 + \cdots + (-1)^k \binom{n+1}{k} a_k + \cdots + (-1)^{n+1} \binom{n+1}{n+1} a_{n+1} = 0.$$

3.18. feladat. (2 pont)
Hogyan születhetett az osztályzatot a pontszámból kiszámító ronda függvény?