KLASSZIKUS ALGEBRA KIEMELT GYAKORLAT (2014 TAVASZ)

1. Komplex számok

1.1. feladat. (1 pont)
Határozza meg az $\left(\frac{i-1}{2+i}\right)^2$ komplex szám kanonikus alakját.

1.2. feladat. (2 pont)
Oldja meg az $x^2-(4+3i)\,x+(1+7i)=0$ egyenletet a komplex számok halmazán.

1.3. feladat. (1 pont)
Ábrázolja a $\{z\in\mathbb{C}\colon\ |\bar{z}-i|\leq 1\}$, illetve $\{z\in\mathbb{C}\colon 0\leq \arg(zi)<\pi/3\}$ halmazokat a komplex számsíkon.

1.4. feladat. (2 pont)
Ábrázolja a komplex számsíkon a $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\lambda$ egyenlőséget kielégítő z komplex számok halmazát.

1.5. feladat. (1 pont)
Számítsa ki $\frac{(-1+i)^{2422}}{\left(\sqrt{3}+i\right)^{1208}}$ értékét. (A végeredményt adja meg trigonometrikus és kanonikus alakban is.)

1.6. feladat. (2 pont)
Hogyan bolyong a komplex számsíkon a z^n sorozat, amint n tart végtelenbe? (A válasz persze z-től függ.)

1.7. feladat. (2 pont)
Fejezze ki $\cos nx$-et $\cos x$ és $\sin x$ segítségével. (Útmutatás: Számítsuk ki kétféleképpen a $(\operatorname{cis} x)^n$ hatványt.)

1.8. feladat. (2 pont)
Mutassa meg, hogy $\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\binom{n}{7}+\cdots=\sqrt{2}^n\sin\frac{n\pi}{4}$.

1.9. feladat. (3 pont)
Adjon zárt formulát a $\sum_{k=0}^{500}\binom{2000}{4k}$ összegre.

1.10. feladat. (2 pont)
Mutassa meg, hogy $4\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-\operatorname{arctg}\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$.

1.11. feladat. (2 pont)
Rajzoljunk egy tetszőleges háromszög oldalaira kifelé szabályos háromszögeket. Bizonyítsa be, hogy ezen háromszögek középpontjai által meghatározott háromszög szabályos.

1.12. feladat. (3 pont)
Igazolja, hogy az $x,y,z\in\mathbb{C}$ számok által meghatározott háromszög pontosan akkor szabályos, ha $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$.

1.13. feladat. (1 pont)
Számítsa ki $\sqrt[4]{-1-\sqrt{3}i}$ mind a négy értékét. (A végeredményt adja meg trigonometrikus és kanonikus alakban is.)

1.14. feladat. (1 pont)
Számítsa ki $\sqrt[3]{i}$ mindhárom értékét. (A végeredményt adja meg trigonometrikus és kanonikus alakban is.)

1.15. feladat. (2 pont)
Egy komplex szám egyik köbgyöke $1+i$. Mennyi lehet a másik két köbgyök?

1.16. feladat. (1 pont)
Ábrázolja a komplex számsíkon a nyolcadik és a tizenkettedik egységgyököket, és írja fel őket trigonometrikus és kanonikus alakban. Mindegyikhez határozza meg azt az n természetes számot, amelyre primitív n-edik egységgyök.

1.17. feladat. (2 pont)
Igaz-e, hogy ha $|z|=1$, akkor z egységgyök?

1.18. feladat. (2 pont)
Mikor lehet ε és $\varepsilon+1$ is egységgyök?

1.19. feladat. (2 pont)
Ha ε primitív századik egységgyök, akkor primitív hányadik egységgyök lesz ε^{34}, ε^{35}, illetve ε^{36}?

1.20. feladat. (3 pont)
Igazolja, hogy $z=\operatorname{cis}72^\circ$ gyöke az $x^4+x^3+x^2+x+1$ polinomnak, majd határozza meg $\sin 72^\circ$ értékét.

1.21. feladat. (2 pont)
Jelölje E_n az n-edik egységgyökök halmazát. Mutassa meg, hogy $E_m\cap E_n=E_{(m,n)}$ minden $m,n\in\mathbb{N}$ esetén.

1.22. feladat. (2 pont)
Jelölje P_n a primitív n-edik egységgyökök halmazát. Igazolja, hogy $\bigcup_{d|n}P_d=E_n$. Hogyan lehet ebből megkapni az Euler-féle φ függvény összegzési függvényét?

1.23. feladat. (3 pont)
Határozza meg az n-edik primitív egységgyökök összegét.