KLASSZIKUS ALGEBRA KIEMELT GYAKORLAT (2014 TAVASZ)

2. Algebrai struktúrák

2.1. feladat. (1 pont)
Gyűrűt, integritástartományt, illetve testet alkotnak-e az alábbi halmazok (a szokásos összeadással és szorzással)?

$$H_1 = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z},\ a \text{ páros}\} \qquad H_2 = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z},\ b \text{ páros}\}$$

2.2. feladat. (1 pont)
Jelölje $\mathcal{P}(U)$ az U halmaz hatványhalmazát, azaz U összes részhalmazainak halmazát. Gyűrűt, integritástartományt, illetve testet alkot-e a $\mathcal{P}(U)$ halmaz a szimmetrikus differencia és a metszés műveletével? (A válasz függ U elemszámától!)

2.3. feladat. (1 pont)
Gyűrűt, integritástartományt, illetve testet alkotnak-e az alábbi halmazok (a szokásos összeadással és szorzással)?

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\} \qquad \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

2.4. feladat. (1 pont)
Gyűrűt, integritástartományt, illetve testet alkot-e az alábbi halmaz (a szokásos összeadással és szorzással)?

$$\mathbb{Z}[\omega] = \{a + b\omega : a, b \in \mathbb{Z}\} \qquad \omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

2.5. feladat. (2 pont)
Legyen $\xi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ egy gyöke az $x^2 + px + q$ polinomnak, ahol p és q egész számok. Mutassa meg, hogy ekkor a $\mathbb{Z}[\xi] = \{a + b\xi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ halmaz integritástartományt alkot a szokásos összeadással és szorzással.

2.6. feladat. (2 pont)
Legyen G egy csoport, és $\emptyset \neq H \subseteq G$. Mutassa meg, hogy ekvivalens az alábbi három feltétel.
(1) H részcsoportja G-nek.
(2) $\forall a, b \in H : a \cdot b \in H$ és $a^{-1} \in H$.
(3) $\forall a, b \in H : a \cdot b^{-1} \in H$.

2.7. feladat. (3 pont) Vigyázat, fizika!
Bizonyítsa be, hogy tetszőleges c pozitív konstans esetén a $(-c, c)$ intervallum csoportot alkot az alábbi $\otimes$ művelettel.

$$x \otimes y = \frac{x + y}{1 + \frac{xy}{c^2}}$$

2.8. feladat. (3 pont)
Jelölje D_n az n pozitív egész szám pozitív osztóinak halmazát, és értelmezzünk ezen egy kétváltozós műveletet az $a * b = \frac{[a,b]}{(a,b)}$ formulával. Mutassa meg, hogy $(D_n; *)$ akkor és csak akkor csoport, ha n négyzetmentes szám.

2.9. feladat. (2 pont)
Töltse ki az alábbi művelettáblázatot úgy, hogy $(\{e, a, b\}; *)$ csoport legyen (e az egységelem). Hány megoldás van?

$*$	e	a	b
e			
a			
b			

2.10. feladat. (2 pont)
Határozza meg a $\mathbb{Z}[\omega]$ gyűrű egységeit (lásd a 2.4. feladatot).

2.11. feladat. (2 pont)
Határozza meg a véges tizedestörtek gyűrűjének egységeit.

2.12. feladat. (2 pont)
Mutassa meg, hogy a $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ gyűrűben végtelen sok egység van.

2.13. feladat. (3 pont)
Definiáljunk egy újfajta „összeadást” és „szorzást” a pozitív valós számok halmazán: legyen $x \oplus y = x \cdot y$ és $x \odot y = x^{\log y}$. Igazolja, hogy az $(\mathbb{R}; \oplus, \odot)$ struktúra test.

2.14. feladat. (3 pont)
Bizonyítsa be, hogy minden véges integritástartomány test.

2.15. feladat. (1 pont)
Számítsa ki a $\mathbb{Z}_{13}$ testben a $\overline{8} + \overline{11}$, $\overline{8} - \overline{11}$, $\overline{8} \cdot \overline{11}$, $\overline{11}/\overline{8}$, $\overline{8}^{11}$, $\overline{11}^{-10}$ elemeket. (Az eredmény $\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{12}$ valamelyike legyen.)

2.16. feladat. (2 pont)
Keresse meg az $x^3 = \overline{1}$ egyenlet összes megoldását a $\mathbb{Z}_5$, illetve a $\mathbb{Z}_{19}$ testben.