Klasszikus algebra előadás

Waldhauser Tamás
2014. május 12.

5.35. Tétel.

Minden euklideszi gyűrű Gauss-gyűrű.

5.36. Következmény.

Az egész számok gyűrűje, minden test feletti polinomgyűrű, valamint a Gauss-egészek gyűrűje Gauss-gyűrű.

5.38. Megjegyzés.

Az 5.35. Tétel megfordítása nem igaz: az egész együtthatós polinomok gyűrűje Gauss-gyűrű, de nem euklideszi gyűrű.

5.37. Megjegyzés.

Ha megvizsgáljuk az 5.35. Tétel bizonyítását, megfigyelhetjük, hogy az irreducibilis felbontás létezése azon múlik, hogy nem létezik végtelen leszálló lánc az oszthatóság szerinti „rendezésben”:

$$\nexists a_0, a_1, a_2, \ldots \in R : a_{i+1} \mid a_i \text{ és } a_{i+1} \nsim a_i \ \ (i = 0, 1, 2, \ldots)\,. \tag{$\exists$}$$

Az irreducibilis faktorizáció unicitásának igazolásához pedig csak arra volt szükségünk, hogy az irreducibilis elemek prímtulajdonságúak:

$$\forall p \in R : p \text{ irreducibilis} \implies p \text{ prím.} \tag{!}$$

Ez a két feltétel teljesül Gauss-gyűrűkben (lásd a következő oldalon), tehát kimondhatjuk, hogy egy R integritástartomány akkor és csak akkor Gauss-gyűrű, ha rendelkezik az ($\exists$) és (!) tulajdonságokkal.

Gauss-gyűrűk

5.39. Tétel.

Legyen R Gauss-gyűrű, és legyen $a, b \in R$ prímfelbontása

$$a \sim p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n} \text{ és } b \sim p_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n}.$$

Ekkor teljesülnek az alábbiak:

1. $a \mid b \iff \alpha_i \leq \beta_i \ \ (i = 1, \ldots, n)$;
2. $\mathrm{lnko}\,(a, b) \sim p_1^{\min(\alpha_1, \beta_1)} \cdot \ldots \cdot p_n^{\min(\alpha_n, \beta_n)}$;
3. $\mathrm{lkkt}\,(a, b) \sim p_1^{\max(\alpha_1, \beta_1)} \cdot \ldots \cdot p_n^{\max(\alpha_n, \beta_n)}$.

Ponthatárok

Összesen maximum 100 pont; x pont esetén

$$\text{osztályzat} = \left\lfloor \frac{x^3 - 165x^2 + 10850x - 174000}{30000} \right\rfloor .$$

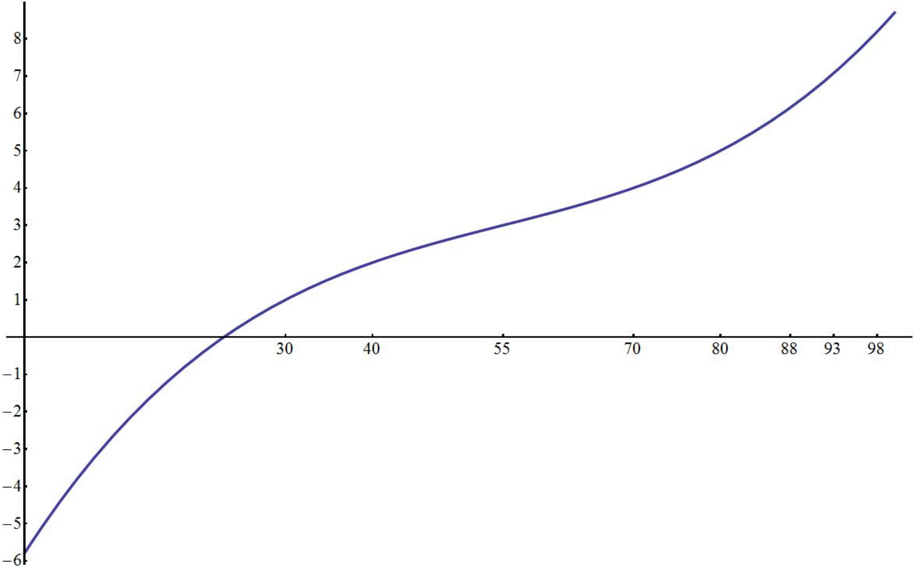
Állítás.

A fenti képlet az alábbi ponthatároknak felel meg:

0	–	39	:	elégtelen
40	–	54	:	elégséges
55	–	69	:	közepes
70	–	79	:	jó
80	–	100	:	jeles

Ponthatárok

Bizonyítás.



Pontgyűjtés

gyakorlat:	$100\% = 40$ pont	(legalább 20 pont kell)
vizsga írásbeli része:	$100\% = 20$ pont	(legalább 10 pont kell)
vizsga szóbeli része:	$100\% = 10$ pont vagy 40 pont	(legalább 1 pont kell)

Könnyebb tételek

1. A komplex számok kanonikus alakja (1.3)
2. A komplex számok trigonometrikus alakja (1.24)
3. Csoportok, gyűrűk, testek (2.4, 2.9)
4. Polinom és polinomfüggvény, Lagrange-interpoláció (3.23, 3.26)
5. Irreducibilis polinomok $\mathbb{C}$ és $\mathbb{R}$ felett (3.46, 3.50)
6. Egész együtthatós polinom racionális gyökei (3.63)
7. Derivált és többszörös gyökök (3.66, 3.68)
8. Harmadfokú egyenlet (3.73)
9. Szimmetrikus polinomok (4.15, 4.16)
10. Oszthatóság integritástartományokban (5.2)
11. Kongruencia integritástartományokban (5.9, 5.12)
12. Legkisebb közös többszörös integritástartományokban (5.21)
13. Oszthatóság és legnagyob közös osztó Gauss-gyűrűkben (5.39)

Nehezebb tételek

1. Gyökvonás a komplex számok körében (1.26, 1.30)
2. Komplex egységgyökök (1.32, 1.33, 1.34)
3. Gyűrű egységcsoportja (2.15, 2.21, 2.25, 2.34)
4. Polinomgyűrűk (2.29, 2.30)
5. Polinomgyűrű maradékosztály-gyűrűje (3.16, 3.38, 3.39)
6. Gauss-lemma (3.55, 3.56)
7. Schönemann–Eisenstein-féle irreducibilitási kritérium (3.59)
8. A valós együtthatós harmadfokú egyenlet diszkussziója (3.74)
9. Szimmetrikus polinomok (4.17)
10. Legnagyobb közös osztó integritástartományokban (5.18)
11. Nevezetes euklideszi gyűrűk (5.25, 3.3/(11), 3.5)
12. Irreducibilis és prím elemek integritástartományokban (5.32, 5.33)
13. Euklideszi gyűrűk és Gauss-gyűrűk (5.35)