Klasszikus algebra előadás

Waldhauser Tamás
2014. április 14.

Többhatározatlanú polinomok

4.3. Definíció.

Adott T test feletti *n-határozatlanú monom*nak nevezzük az $ax_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$ alakú formális kifejezéseket, ahol $0 \neq a \in T$ és $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$. Az ilyen monomok véges összegeit pedig T feletti *n-határozatlanú polinom*oknak nevezzük.

Jelölés.

A T feletti n-határozatlanú polinomok halmazát $T[x_1, \ldots, x_n]$ jelöli.

4.4. Tétel.

A természetes módon definiált szorzással és összeadással $T[x_1, \ldots, x_n]$ *integritástartomány.*

4.5. Megjegyzés.

Az n-határozatlanú polinomok gyűrűjét lehetne rekurzívan is definiálni: legyen

$$T[x_1, \ldots, x_n] = (T[x_1, \ldots, x_{n-1}])[x_n],$$

azaz a $T[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ integritástartomány feletti (egyhatározatlanú) polinomgyűrű.

Többhatározatlanú polinomok

Példa.

$$\begin{aligned}
f = {} & 7x_1^2x_3 - 2x_1x_2x_3^4 + 9x_1x_2 - 3x_1^2x_2x_3^2 + x_1x_2x_3^3 - 2x_1^2 + \\
& 5x_1x_2^2x_3 - x_1^2x_2x_3 - 6x_1x_3 + 2x_3^2 + x_1x_3^2 + 4x_2^2x_3^2 + 8 \qquad \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f = {} & x_1^2 \cdot \left(-3x_2x_3^2 - x_2x_3 + 7x_3 - 2\right) + \\
& x_1 \cdot \left(5x_2^2x_3 - 2x_2x_3^4 + x_2x_3^3 + 9x_2 + x_3^2 - 6x_3\right) + \\
& \quad \left(4x_2^2x_3^2 + 2x_3^2 + 8\right) \qquad \in \mathbb{R}[x_2, x_3][x_1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f = {} & x_1^2 \cdot \Big(x_2 \cdot (-3x_3^2 - x_3) + (7x_3 - 2)\Big) + \\
& x_1 \cdot \Big(x_2^2 \cdot (5x_3) - x_2\left(2x_3^4 + x_3^3 + 9\right) + \left(x_3^2 - 6x_3\right)\Big) + \\
& \quad \Big(x_2^2 \cdot \left(4x_3^2\right) + \left(2x_3^2 + 8\right)\Big) \qquad \in \mathbb{R}[x_3][x_2][x_1]
\end{aligned}$$

Lexikografikus rendezés

4.6. Definíció.

Azt mondjuk, hogy az $ax_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$ monom *lexikografikusan megelőzi* a $bx_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n}$ monomot, ha

$$\exists i \in \{1, \ldots, n\} : \; k_1 = l_1, \ldots, k_{i-1} = l_{i-1} \text{ és } k_i > l_i.$$

(Vagyis megkeressük az első eltérést a $k_1, k_2, \ldots, k_n$ és az $l_1, l_2, \ldots, l_n$ kitevősorozatok között, és amelyikben nagyobb szám áll ezen a helyen, az kerül előrébb a lexikografikus sorrendben.)

Jelölés.

Tetszőleges $M, N \in T[x_1, \ldots, x_n]$ monomok esetén $M \sqsupset N$ jelöli azt, hogy M lexikografikusan megelőzi N-et, $M \underset{\sim}{\sqsupset} N$ pedig azt, hogy $M \sqsupset N$ vagy $M \sim N$. A $\underset{\sim}{\sqsupset}$ relációt *lexikografikus rendezés*nek nevezzük.

Lexikografikus rendezés

Példa.

$$x_1^2x_2^{99}x_3^{23}x_4^{71} \quad \sqsubset \quad x_1^3x_2x_3^2x_4^5$$

$$-2x_1^3x_2x_3^4x_4^2 \quad \sqsupset \quad 14x_1^3x_2x_3^2x_4^3$$

$$x_1x_2x_3^2x_4 \quad \sqsupset \quad 3x_2^4x_3^6x_4^2$$

$$12x_1^2x_2^3x_3x_4^5 \quad \sim \quad -9x_1^2x_2^3x_3x_4^5$$

Lexikografikus rendezés

4.7. Állítás.

A monomok halmazán $\sqsupseteq$ reflexív, tranzitív és dichotóm reláció, valamint $M \sqsupseteq N$ és $M \sqsubseteq N$ akkor és csak akkor áll fenn egyszerre, ha M és N asszociált.

4.8. Megjegyzés.

Az előző állítás szerint a $\sqsupseteq$ reláció teljes rendezés (dichotóm részbenrendezés) a monomok halmazán „modulo asszociáltság''. Általában egyszerre csak egy adott polinomban előforduló monomokat vizsgálunk, ezek között pedig nincsenek asszociáltak (azokat össze lehetne vonni egy taggá), tehát ilyenkor valójában teljesen rendezett halmazzal dolgozhatunk.

4.9. Állítás.

A monomok szorzása monoton a lexikografikus rendezésre nézve, azaz tetszőleges $M, \hat{M}, N, \hat{N}$ monomokra ha $M \sqsupseteq N$ és $\hat{M} \sqsupseteq \hat{N}$, akkor $M\hat{M} \sqsupseteq N\hat{N}$, és itt asszociáltság csak akkor teljesül, ha $M \sim N$ és $\hat{M} \sim \hat{N}$.

4.10. Állítás.

Tetszőleges $f, g \in T[x_1, \ldots, x_n]$ nemzéró polinomokra fg lexikografikusan első tagja nem más, mint f és g lexikografikusan első tagjának szorzata.

Lexikografikus rendezés

Példa.
A korábbi példában szereplő polinom tagjai lexikografikusan csökkenő sorrendben:

$$f = -3x_1^2x_2x_3^2 - x_1^2x_2x_3 + 7x_1^2x_3 - 2x_1^2 + 5x_1x_2^2x_3 - 2x_1x_2x_3^4 +$$

$$+ x_1x_2x_3^3 + 9x_1x_2 + x_1x_3^2 - 6x_1x_3 + 4x_2^2x_3^2 + 2x_3^2 + 8$$

Szimmetrikus polinomok

4.11. Definíció.

Az $f \in T[x_1, \ldots, x_n]$ polinomot *szimmetrikus polinom*nak nevezzük, ha invariáns a határozatlanok minden permutációjára, azaz

$$\forall \pi \in S_n : f(x_{1\pi}, \ldots, x_{n\pi}) = f(x_1, \ldots, x_n).$$

4.12. Definíció.

A k-adik n-határozatlanú *elemi szimmetrikus polinom* az $x_1, \ldots, x_n$ határozatlanokból képezett összes k-tényezős szorzatok összege $(k = 1, \ldots, n)$.

Jelölés.

A k-adik n-határozatlanú elemi szimmetrikus polinomot σ_k jelöli (az alaptest és n értéke általában világos a szövegkörnyezetből), tehát

$$\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_k} = \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |I| = k}} \prod_{i \in I} x_i \in T[x_1, \ldots, x_n].$$

4.13. Megjegyzés.

Az elemi szimmetrikus polinomokkal már találkoztunk: segítségükkel fejezhetők ki egy komplex együtthatós főpolinom együtthatói a polinom gyökeiből. Tehát a Viète-formulák $\sigma_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (-1)^k a_{n-k}$ alakban is felírhatók.

Szimmetrikus polinomok

Példa.

Határozzuk meg az $x^3 + 2x^2 + 8x + 6$ polinom gyökeinek négyzetösszegét.
A Viète-formulák szerint

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= \sigma_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -2, \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 &= \sigma_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 8, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 &= \sigma_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -6. \end{aligned}$$

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 - 2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) = 4 - 16 = -12$$

A megoldás kulcsa az, hogy az $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$ polinomot ki lehet fejezni az elemi szimmetrikus polinomok segítségével:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2.$$

Ez pedig azért tehető meg, mert $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ szimmetrikus polinom.

A szimmetrikus polinomok alaptétele

4.14. Tétel.

A szimmetrikus polinomok részgyűrűt alkotnak a $T[x_1, \ldots, x_n]$ polinomgyűrűben.

4.15. Lemma.

Ha $ax_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$ egy szimmetrikus polinom lexikografikusan első tagja, akkor

$$k_1 \geq \cdots \geq k_n.$$

4.16. Lemma.

Tetszőleges $k_1 \geq \cdots \geq k_n$ nemnegatív egészekhez léteznek olyan $l_1, \ldots, l_n$ nemnegatív egészek, hogy $\sigma_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot \sigma_n^{l_n} \in T[x_1, \ldots, x_n]$ lexikografikusan első tagja éppen $x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$.

4.17. Tétel (a szimmetrikus polinomok alaptétele).

Bármely szimmetrikus polinom felírható, mégpedig egyetlen módon, az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként. Formálisan:

$$\forall f \in T[x_1, \ldots, x_n] : f \text{ szimmetrikus} \implies \exists! h \in T[x_1, \ldots, x_n] : f = h(\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

Diszkrimináns

4.18. Következmény.

Tetszőleges n-edfokú $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinom esetén ha f komplex gyökei (multiplicitással) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, akkor minden $g \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$ szimmetrikus polinomra $g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Q}$.

Példa.

Ha a $g = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)^2$ polinomra alkalmazzuk a fenti következményt, akkor azt kapjuk, hogy racionális együtthatós polinom diszkriminánsa racionális szám (hiszen kifejezhető az együtthatók racionális polinomjaként).

A harmadfokú polinom diszkriminánsa

$$D = (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2$$

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3$$

$$\sigma_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$$

$$\sigma_3 = x_1 x_2 x_3$$

$$\begin{aligned} D = \quad & \color{red}{x_1^4 x_2^2} - 2x_1^4 x_2 x_3 + x_1^4 x_3^2 - 2x_1^3 x_2^3 + 2x_1^3 x_2^2 x_3 + 2x_1^3 x_2 x_3^2 - 2x_1^3 x_3^3 \\ & + x_1^2 x_2^4 + 2x_1^2 x_2^3 x_3 - 6x_1^2 x_2^2 x_3^2 + 2x_1^2 x_2 x_3^3 + x_1^2 x_3^4 - 2x_1 x_2^4 x_3 \\ & + 2x_1 x_2^3 x_3^2 + 2x_1 x_2^2 x_3^3 - 2x_1 x_2 x_3^4 + x_2^4 x_3^2 - 2x_2^3 x_3^3 + x_2^2 x_3^4 \end{aligned}$$

A harmadfokú polinom diszkriminánsa

$$D-\sigma_1^2\sigma_2^2=$$

$$-4x_1^4x_2x_3-4x_1^3x_2^3-6x_1^3x_2^2x_3-6x_1^3x_2x_3^2-4x_1^3x_3^3$$
$$-6x_1^2x_2^3x_3-21x_1^2x_2^2x_3^2-6x_1^2x_2x_3^3-4x_1x_2^4x_3$$
$$-6x_1x_2^3x_3^2-6x_1x_2^2x_3^3-4x_1x_2x_3^4-4x_2^3x_3^3$$

$$D-\sigma_1^2\sigma_2^2+4\sigma_1^3\sigma_3=$$

$$-4x_1^3x_2^3+6x_1^3x_2^2x_3+6x_1^3x_2x_3^2-4x_1^3x_3^3+6x_1^2x_2^3x_3$$
$$+3x_1^2x_2^2x_3^2+6x_1^2x_2x_3^3+6x_1x_2^3x_3^2+6x_1x_2^2x_3^3-4x_2^3x_3^3$$

$$D-\sigma_1^2\sigma_2^2+4\sigma_1^3\sigma_3+4\sigma_2^3=$$

$$18x_1^3x_2^2x_3+18x_1^3x_2x_3^2+18x_1^2x_2^3x_3+27x_1^2x_2^2x_3^2$$
$$+18x_1^2x_2x_3^3+18x_1x_2^3x_3^2+18x_1x_2^2x_3^3$$

$$D-\sigma_1^2\sigma_2^2+4\sigma_1^3\sigma_3+4\sigma_2^3-18\sigma_1\sigma_2\sigma_3=-27x_1^2x_2^2x_3^2$$

$$D-\sigma_1^2\sigma_2^2+4\sigma_1^3\sigma_3+4\sigma_2^3-18\sigma_1\sigma_2\sigma_3+27\sigma_3^2=0$$

A harmadfokú polinom diszkriminánsa

$D = \sigma_1^2\sigma_2^2 - 4\sigma_1^3\sigma_3 - 4\sigma_2^3 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 27\sigma_3^2$

Ha $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3) = x^3 + px + q$, akkor a Viéte-formulák szerint

$$\sigma_1(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = 0,$$

$$\sigma_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = p,$$

$$\sigma_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = -q,$$

tehát

$$\begin{aligned} D(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) &= -4\sigma_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^3 - 27\sigma_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^2 \\ &= -4p^3 - 27q^2 \\ &= -108\left(\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right). \end{aligned}$$

Algebrai és transzcendens számok

4.19. Definíció.

Az α komplex számot *algebrai szám*nak nevezzük, ha gyöke valamely nemzéró racionális együtthatós polinomnak. A nem algebrai számokat *transzcendens szám*oknak nevezzük.

4.20. Definíció.

Ha $f \in \mathbb{Q}[x]$ minimális fokszámú mindazon nemzéró racionális együtthatós főpolinomok között, melyeknek α gyöke, akkor f-et az α algebrai szám *minimálpolinom*jának nevezzük.

4.21. Tétel*.

Algebrai szám minimálpolinomja mindig egyértelműen meghatározott, és irreducibilis a racionális számtest felett. Továbbá, ha $f \in \mathbb{Q}[x]$ olyan irreducibilis főpolinom melynek az α algebrai szám gyöke, akkor f megegyezik α minimálpolinomjával.

4.22. Tétel*.

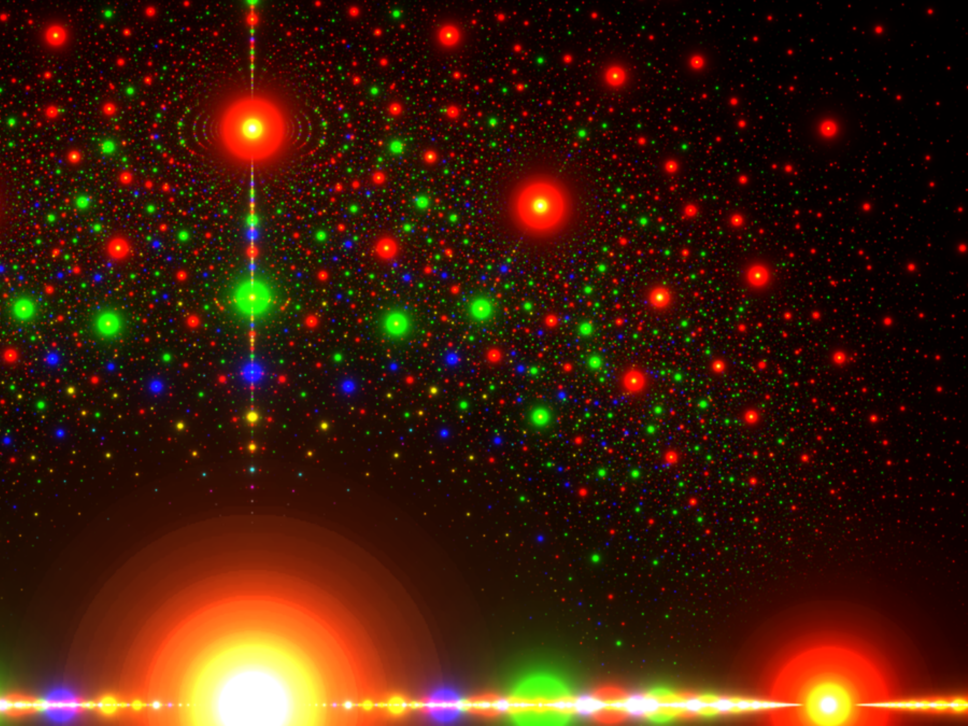
Létezik transzcendens szám.

Algebrai és transzcendens számok

Példa.

- $\sqrt{2}$ algebrai szám, minimálpolinomja: $x^2 - 2$ (miért irreducibilis?).
- $\sqrt[n]{2}$ algebrai szám, minimálpolinomja: $x^n - 2$ (miért irreducibilis?).
- i algebrai szám, minimálpolinomja: $x^2 + 1$ (miért irreducibilis?).
- π és e transzcendens számok.
- A Liouville-féle $\sum \frac{1}{10^{n!}}$ konstans transzcendens szám.
- Gelfond–Schneider-tétel: Ha $\alpha \neq 0, 1$ és $\beta \notin \mathbb{Q}$ algebrai számok, akkor α^β transzcendens szám.

  Például $2^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ és $i^i = e^{-\pi/2}$ transzcendens számok.



Algebrai számok és gyökmennyiségek

4.23. Tétel*.

Az algebrai számok résztestet alkotnak a komplex számok testében.

4.24. Tétel*.

Ha α algebrai szám és $n \geq 2$, akkor $\sqrt[n]{\alpha}$ is algebrai szám (a gyöknek mind az n értékére).

4.25. Definíció.

Az α komplex számot *gyökmennyiség*nek nevezzük, ha megkapható racionális számokból kiindulva a négy alapművelet (összeadás, kivonás, szorzás, osztás) és egész kitevős gyökvonás véges számú alkalmazásával.

4.26. Következmény.

A gyökmennyiségek algebrai számok.

Példa.

Ez a szám algebrai:

$$\frac{\sqrt[3]{3-\sqrt{\sqrt[4]{2}+\sqrt[5]{\frac{3}{17}}}}+\sqrt[17]{323-\sqrt{2014}}}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[5]{5}}$$

Algebrai számok és gyökmennyiségek

4.27. Tétel*.

Van olyan algebrai szám, ami nem gyökmennyiség.

A fenti ártatlannak látszó tételből következik, hogy nem minden egyenlet oldható meg gyökjelek segítségével. Az ötödfokú egyenletnek már nincs általános megoldóképlete, sőt, például az $x^5 - 4x + 2 = 0$ egyenletnek még „ad hoc” megoldóképlete sincs, mert gyökei nem gyökmennyiségek.

4.28. Tétel*.

Az algebrai számok teste algebrailag zárt, azaz ha $\alpha \in \mathbb{C}$ gyöke a legalább elsőfokú $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ polinomnak, ahol $a_0, \ldots, a_n$ algebrai számok, akkor α maga is algebrai szám.