

Klasszikus algebra előadás

Waldhauser Tamás
2014. február 17.

Számolás trigonometrikus alakban

1.22. Tétel.

Tetszőleges nullától különböző $u = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ és $v = s (\cos \psi + i \sin \psi)$ komplex számokra

1. $\bar{u} = r (\cos (-\varphi) + i \sin (-\varphi))$;
2. $uv = rs (\cos (\varphi + \psi) + i \sin (\varphi + \psi))$;
3. $\frac{1}{v} = \frac{1}{s} (\cos (-\psi) + i \sin (-\psi))$;
4. $\frac{u}{v} = \frac{r}{s} (\cos (\varphi - \psi) + i \sin (\varphi - \psi))$.

1.23. Megjegyzés.

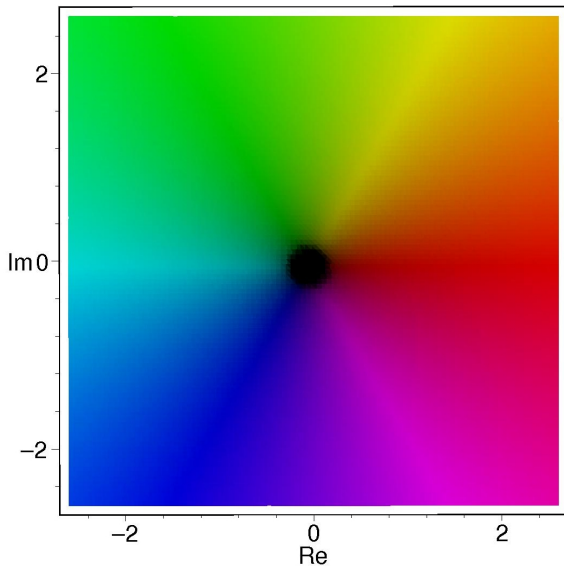
A szorzat trigonometrikus alakjára vonatkozó képletből látszik, hogy rögzített $v = \cos \psi + i \sin \psi$ esetén az $u \mapsto uv$ leképezés nem más, mint az origó körüli ψ szögű forgatás a komplex számsíkon.

1.24. Tétel (Moivre-képlet).

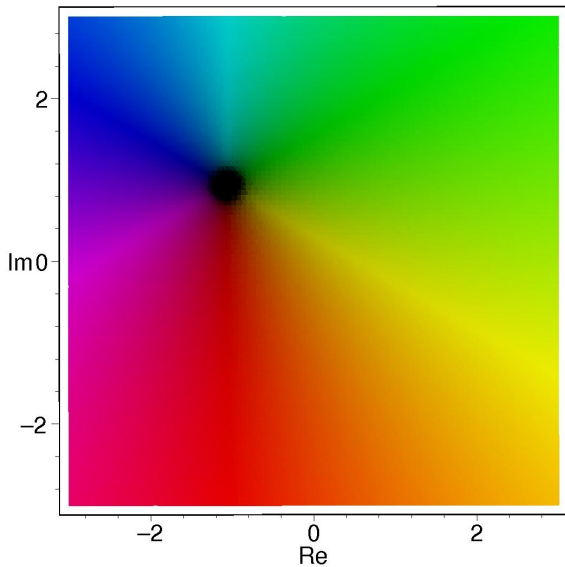
Bármely nemzéró $z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ komplex szám és $n \in \mathbb{Z}$ esetén

$$z^n = r^n (\cos (n\varphi) + i \sin (n\varphi)).$$

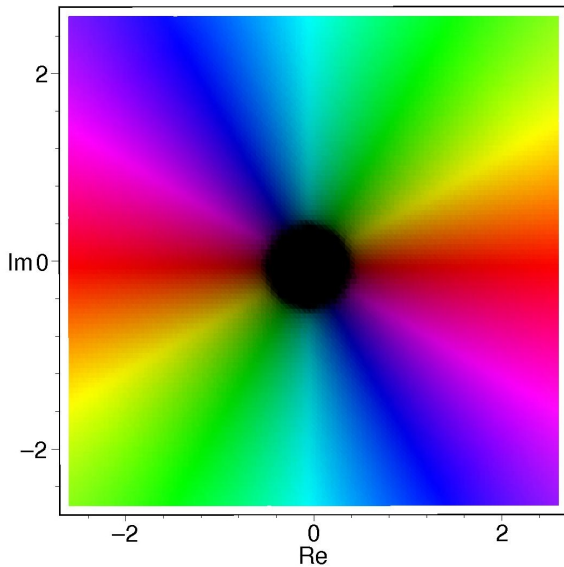
A komplex számsík színezése



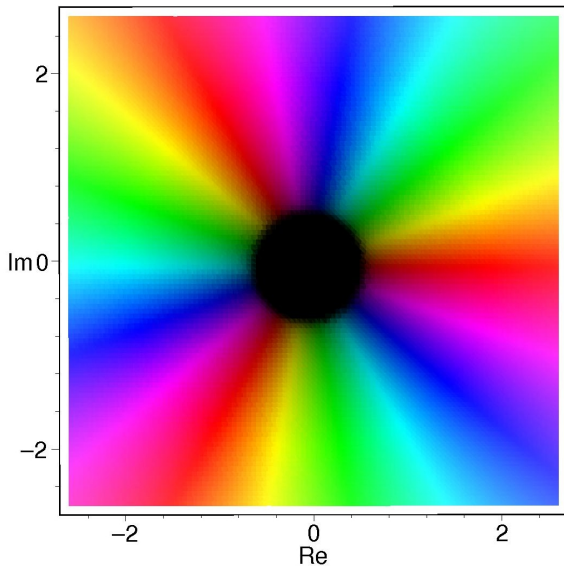
$$f(z) = zi + 1 + i \text{ színeképe}$$



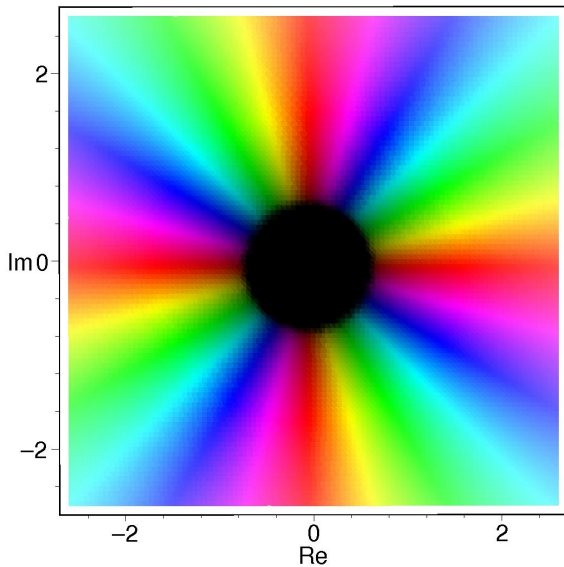
$f(z) = z^2$ színeképe



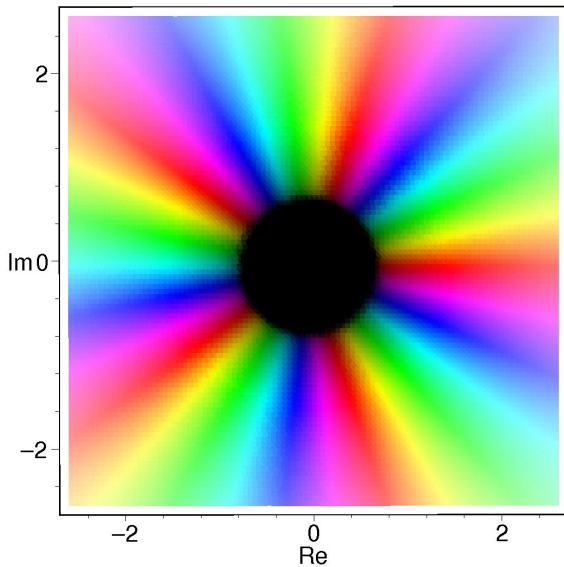
$f(z) = z^3$ színeképe



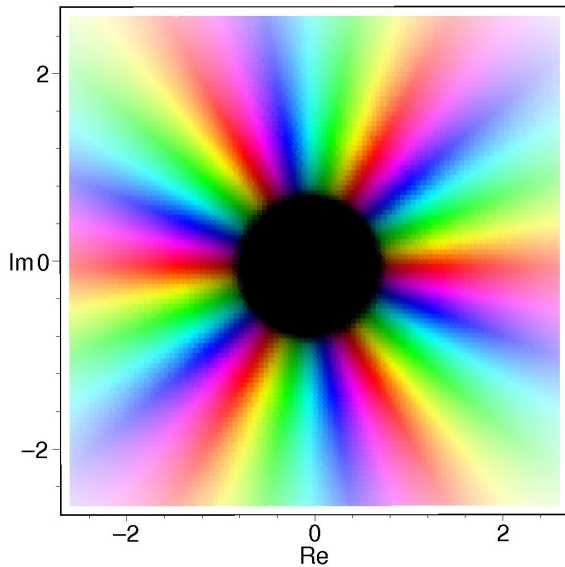
$f(z) = z^4$ színeképe



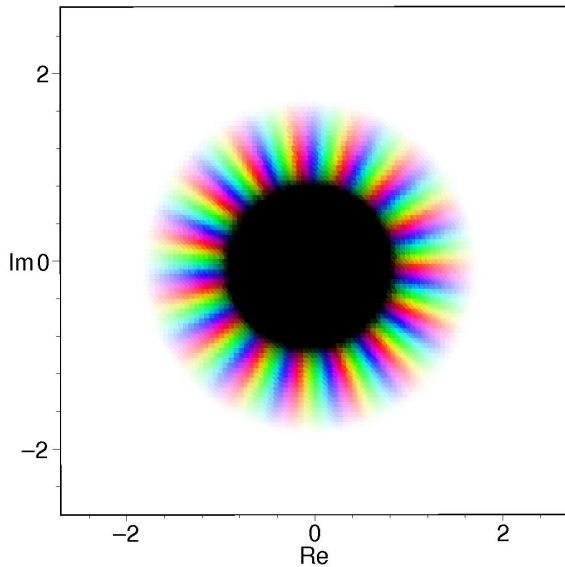
$f(z) = z^5$ színeképe



$$f(z) = z^6 \text{ színeképe}$$



$f(z) = z^{15}$ színeképe



1.25. Definíció.

Tetszőleges n pozitív egész szám és $z \in \mathbb{C}$ esetén azt mondjuk, hogy az u komplex szám **n -edik gyöke** z -nek, ha $u^n = z$.

1.26. Tétel.

Minden nemnulla komplex számnak pontosan n különböző n -edik gyöke van. A $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ trigonometrikus alakban megadott komplex szám n -edik gyökei:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

1.27. Definíció.

Az ε komplex számot **n -edik egységgyök**nek nevezzük, ha $\varepsilon^n = 1$.

Egységgyökök

1.28. Állítás.

Az n -edik egységgyökök a következők:

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Ezzel a jelöléssel $\varepsilon_0 = 1$ és $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$ minden $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ esetén.

1.29. Megjegyzés.

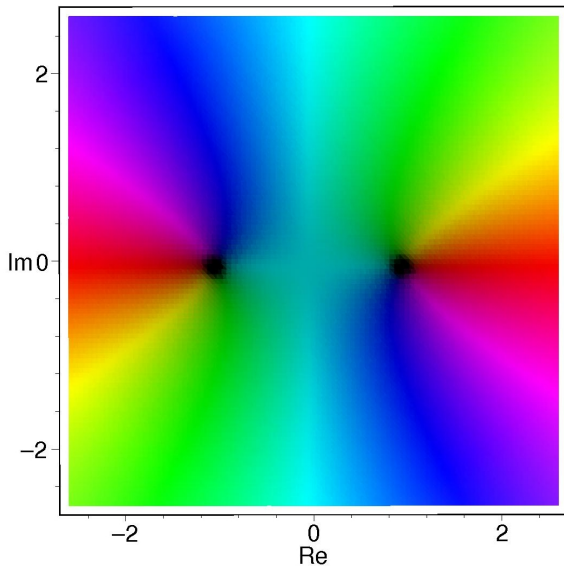
Az n -edik egységgyökök egy szabályos n -szöget alkotnak a komplex számsíkon, amelynek körülírt köre az origó középpontú egységkör, és egyik csúcsa 1. (Ez a két információ egyértelműen meg is határozza az n -szöget.)

1.30. Következmény.

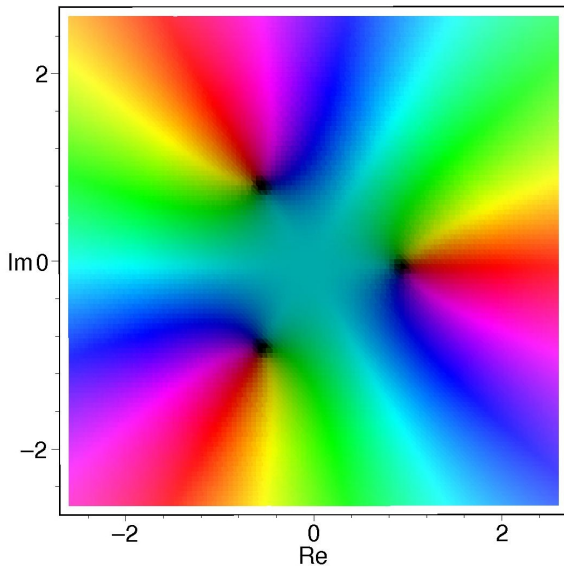
Egy nemnulla komplex szám összes n -edik gyökét megkapjuk, ha egy rögzített n -edik gyökét megszorozzuk sorra az n -edik egységgyökökkel. Tehát ha $u_0^n = z \neq 0$, akkor a z komplex szám n -edik gyökei:

$$\sqrt[n]{z} = u_0 \varepsilon_k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

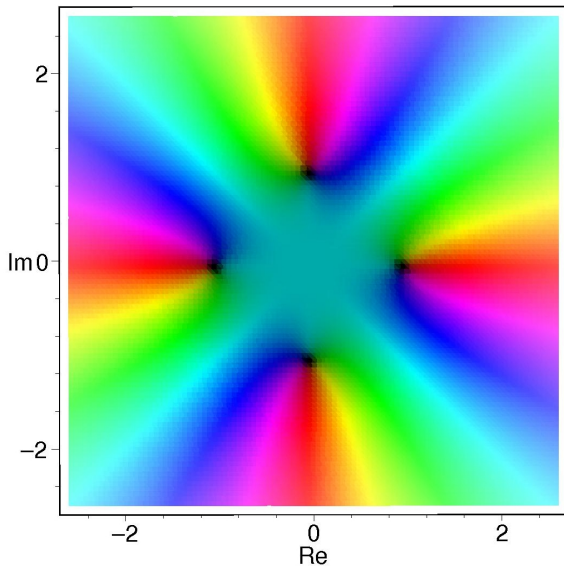
$f(z) = z^2 - 1$ színeképe



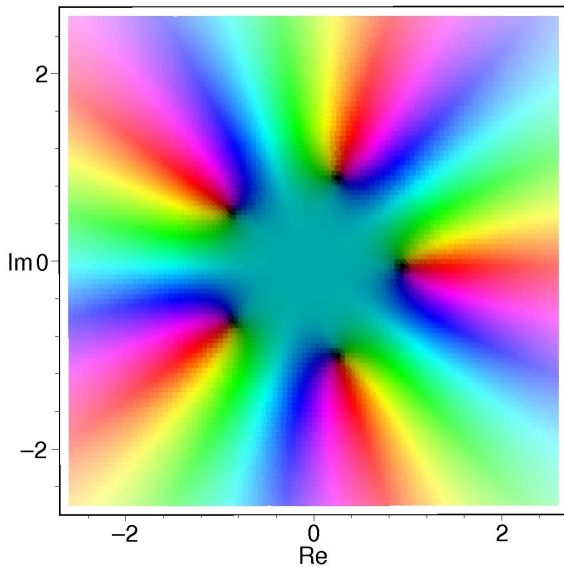
$f(z) = z^3 - 1$ színeképe



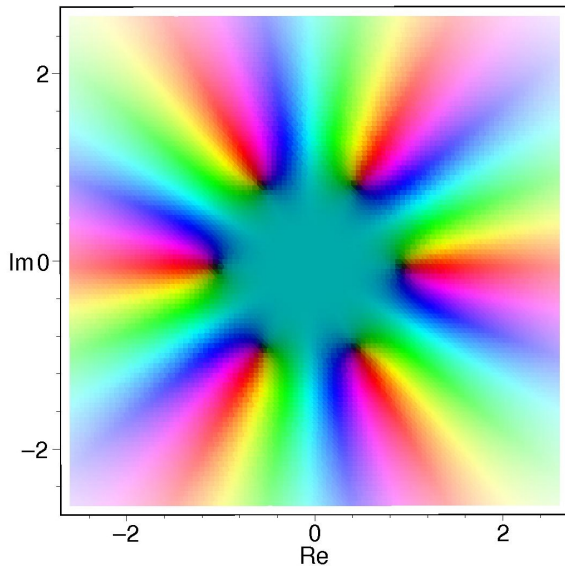
$f(z) = z^4 - 1$ színeképe



$f(z) = z^5 - 1$ színeképe



$f(z) = z^6 - 1$ színeképe



Primitív egységyökök

1.31. Definíció.

Legyen ε egy n -edik egységyök. Azt mondjuk, hogy ε *primitív n -edik egységyök*, ha nem ℓ -edik egységyök semmilyen n -nél kisebb ℓ pozitív egészre. Másképp fogalmazva, n a legkisebb pozitív kitevő amelyre emelve ε -t a hatvány értéke 1 lesz:

$$n = \min \left\{ \ell \in \mathbb{N} : \varepsilon^\ell = 1 \right\}.$$

1.32. Állítás.

Egy n -edik egységyök pontosan akkor primitív n -edik egységyök, ha hatványaiként megkapható az összes n -edik egységyök.

1.33. Tétel.

Az $\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$ egységyökök akkor és csak akkor primitív n -edik egységyökök, ha k relatív prím n -hez.

1.34. Következmény.

A primitív n -edik egységyökök száma $\varphi(n)$ (itt φ az Euler-féle függvény).

1.35. Tétel.

Ha $n > 1$, akkor az n -edik egységyökök összege 0.

2. Absztrakt algebrai struktúrák

Definíció.

Az algebra az algebrai struktúrák tudománya.

Definíció.

Algebrai struktúrán egy műveletekkel „felszerelt” nemüres halmazt értünk.

Példa.

- ▶ $(\mathbb{N}; +)$
- ▶ $(\mathbb{N}; \cdot)$
- ▶ $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$
- ▶ $(\mathbb{Z}; +, -, \cdot)$
- ▶ $(\mathbb{C}; +, \cdot)$
- ▶ $(\mathbb{R}^{n \times n}; +, \cdot)$



algebrai struktúrák



Félcsoportok

2.1. Definíció.

Félcsoporton egy asszociatív kétváltozós művelettel ellátott nemüres halmazt értünk. Formálisan: $(A; \circ)$ félcsoport, ha A nemüres halmaz, és

$$(0) \quad \circ: A \times A \rightarrow A, (x, y) \mapsto x \circ y;$$

$$(1) \quad \forall a, b, c \in A: (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

2.2. Definíció.

Az $(A; \circ)$ félcsoport e elemét **egységelem**nek nevezzük, ha minden $a \in A$ -ra $a \circ e = e \circ a = a$ teljesül.

2.3. Definíció.

Ha az $(A; \circ)$ félcsoportban e egységelem és $a \circ b = b \circ a = e$ teljesül az $a, b \in A$ elemekre, akkor azt mondjuk, hogy a és b egymás **inverze**.

2.4. Állítás.

Félcsoportban az egységelem és az elemek inverzei egyértelműen meghatározottak (ha léteznek egyáltalán).

Csoportok

2.5. Definíció.

Az $(A; \circ)$ félcsoport *csoport*, ha van benne egységelem és minden elemnek van inverze, azaz A nemüres halmaz, és

- (0) $\circ: A \times A \rightarrow A, (x, y) \mapsto x \circ y$;
- (1) $\forall a, b, c \in A: (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$;
- (2) $\exists e \in A \forall a \in A: e \circ a = a \circ e = a$;
- (3) $\forall a \in A \exists a^* \in A: a \circ a^* = a^* \circ a = e$.

2.6. Definíció.

Ha az $(A; \circ)$ csoport művelete kommutatív (azaz $\forall a, b \in A: a \circ b = b \circ a$), akkor *kommutatív csoportnak*, vagy *Abel-csoportnak* nevezzük.

Jelölés.

	$a \circ b$	e	a^*	$b \circ a^*$
multiplikatív írásmód:	ab	1	a^{-1}	b/a
additív írásmód:	$a + b$	0	$-a$	$b - a$

(Ellen)példák additív csoportokra

Az alábbi H számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot az összeadásra nézve?

- ▶ $H = \{0\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{N}$: nem (csak félcsoport)
- ▶ $H = \{\text{páros számok}\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \{\text{páratlan számok}\}$: nem (nem is zárt)
- ▶ $H = \{\text{irracionális számok}\}$: nem (nem is zárt)
- ▶ $H = \{\text{véges tizedestörtek}\}$: igen (Abel-csoport)

(Ellen)példák multiplikatív csoportokra

Az alábbi H számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szorzásra nézve?

- ▶ $H = \{1\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$: nem (*csak* egységelemes félcsoport)
- ▶ $H = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{Q} \setminus \{0\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$: nem (*csak* egységelemes félcsoport)
- ▶ $H = \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{N}$: nem (*csak* egységelemes félcsoport)
- ▶ $H = \{\text{irracionális számok}\}$: nem (nem is zárt)
- ▶ $H = \{\text{véges tizedestörtek}\} \setminus \{0\}$: nem (*csak* egységelemes félcsoport)

További (ellen)példák csoportokra

- ▶ $(\mathbb{R}^{n \times n}; \cdot)$: *csak* egységelemes félcsoport
- ▶ $(\{M \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det(M) \neq 0\}; \cdot) = GL_n(\mathbb{R})$: (nemkommutatív) csoport
neve: általános lineáris csoport
- ▶ $(\{A \rightarrow A \text{ leképezések}\}; \circ) = T_A$: *csak* egységelemes félcsoport
neve: $(A$ feletti) transzformációfélcsoport
- ▶ $(\{A \rightarrow A \text{ bijekciók}\}; \circ) = S_A$: (nemkommutatív) csoport
neve: $(A$ feletti) szimmetrikus csoport