Klasszikus algebra előadás

Waldhauser Tamás
2014. február 10.

Tematika

Komplex számok: kanonikus alak, trigonometrikus alak, Moivre-képlet, gyökvonás, egységgyökök.

Algebrai struktúrák: a csoport, gyűrű, integritástartomány és test fogalma, gyűrű egységcsoportja, nevezetes példák.

Számelmélet integritástartományokban: oszthatóság, legnagyobb közös osztó, irreducibilis és prím elemek, egyértelmű irreducibilis faktorizáció, Euklideszi gyűrűk, főideálgyűrűk, Gauss-gyűrűk, a Gauss-egészek gyűrűje.

Test fölötti egyhatározatlanú polinomgyűrű: oszthatóság, kongruencia, maradékosztály-gyűrű, maradékos osztás, euklideszi algoritmus, legnagyobb közös osztó, egyértelmű irreducibilis faktorizáció. Polinomfüggvények: polinomok gyökei, Bézout tétele, Horner-elrendezés, Lagrange-interpoláció. A klasszikus algebra alaptétele és következményei: a komplex együtthatós polinomok gyöktényezős alakja, Viéte-képletek, irreducibilis faktorizáció a valós számtest fölött. Polinomok a racionális számtest fölött: racionális gyökök, irreducibilitás, Schönemann–Eisenstein-tétel. A harmad- és negyedfokú polinomok gyökeinek meghatározása. Polinomok közös, ill. többszörös gyökei, derivált, iterált Horner-módszer.

Test fölötti többhatározatlanú polinomgyűrű, a szimmetrikus polinomok alaptétele, algebrai számok.

Tematika

1. Komplex számok — mert minden polinomnak kell gyök!
2. Algebrai struktúrák — mert kellenek polinomok!
3. Polinomok — mert csak!
4. Többhatározatlanú polinomok — mert egy nem elég!
5. Absztrakt számelmélet — mert XXI. század!

(Ma)tematika

Érteni, érteni, tudni, érteni érteni, érteni!

Követelmények

1. Gyakorlat: nem nézni, csinálni!
   - 100% = 40 pont, legalább 20 pont kell
2. Elektronikus tesztek: addig csinálni, amíg nem hibátlan!
   - `http://www.math.u-szeged.hu/~mmaroti/tests`
   - kipróbálni `vendeg`-ként, és regisztrálni
   - ha baj van: `mmaroti@math.u-szeged.hu`, `twaldha@math.u-szeged.hu`
   - 4 teszt lesz: Komplex számok 1 és 2, Polinomok 1 és 2
   - időpontok előadáson és honlapon lesznek kihirdetve
3. Évközi dolgozatok
   - 2 dolgozat (előadáson): Komplex számok, Polinomok
   - legalább 80% kell mindkét dolgozaton
   - időpontok előadáson és honlapon lesznek kihirdetve
   - mintadolgozat majd a honlapon

Értékelés

4. Vizsga írásbeli része
   - megértést ellenőrző kérdések (igaz-e?, adjunk (ellen)példát!)
   - 100% = 20 pont, legalább 10 pont kell
   - mintadolgozat majd a honlapon

5. Vizsga szóbeli része
   - kétféle tételsor: könnyebb tételek (10 pont), nehezebb tételek (40 pont)
   - legalább 1 pont kell
   - bizonyítani kell!

Összesen 70 pont (könnyebb szóbeli tétellel), illetve 100 pont (nehezebb szóbeli tétellel) szerezhető.
Ha ez a pontszám x, *és minden minimumfeltétel teljesül*, akkor

$$\text{osztályzat} = \left\lfloor \frac{x^3 - 165x^2 + 10850x - 174000}{30000} \right\rfloor .$$

Kiemelt?

- Kiemelt előadás
  - ami a normál előadásba (számelmélet, klasszikus algebra) nem fért bele
  - $+$ extra csemegék
  - $+$ 1 óra
  - $+$ 1 kredit
  - $+$ 1 vizsga
  - ha nem tetszik, le lehet adni
- Kiemelt gyakorlat
  - a normál előadás tematikáját követi (a kiemelt előadástól független)
  - kevesebb idő „favágásra”
  - több idő érdekesebb feladatokra
  - $+$ 0 óra
  - $+$ 0 kredit
  - $+$ 0 vizsga
  - ha nem tetszik, le lehet adni (van párhuzamos gyakorlat)

1. Komplex számok

A komplex számok definíciója

1.1. Definíció.

A valós számokból álló számpárokat *komplex szám*oknak nevezzük.

Jelölés.

A komplex számok halmazát $\mathbb{C}$ jelöli, tehát $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

1.2. Definíció.

Az (a, b) és (c, d) komplex számok *összeg*ét és *szorzat*át a következőképpen értelmezzük:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)\,;$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)\,.$$

A műveletek tulajdonságai

1.3. Tétel.

Bármely u, v, w komplex számokra teljesülnek az alábbiak:

(1) $(u+v)+w = u+(v+w)\,;$

(2) $u+v = v+u;$

(3) $u+(0,0) = u;$

(4) $\exists u' \in \mathbb{C} : u+u' = (0,0)\,;$

(5) $(u \cdot v)\cdot w = u\cdot(v\cdot w)\,;$

(6) $u\cdot v = v\cdot u;$

(7) $u\cdot(1,0) = u;$

(8) $u \neq (0,0) \implies \exists u^* \in \mathbb{C} : u\cdot u^* = (1,0)\,;$

(9) $u\cdot(v+w) = u\cdot v + u\cdot w;$

(10) $u\cdot(0,0) = (0,0)\,.$

1.4. Megjegyzés.

Az előző tételbeli u' komplex számot (ami egyértelműen meghatározott) u *additív inverz*ének nevezzük és a továbbiakban $-u$-val jelöljük. Hasonlóan u^* is egyértelműen meghatározott, neve u *multiplikatív inverz*e, jelölése u^{-1}.
Két komplex szám *különbség*ét a $v-u = v+(-u)$ képlettel definiálhatjuk, $u \neq (0,0)$ esetén pedig v és u *hányados*a $v/u = v\cdot u^{-1}$. A kivonás és osztás műveletére is érvényesek a valós számoknál megszokott tulajdonságok (például a szorzás disztributív a kivonásra, stb.).

A valós számok beágyazása

1.5. Állítás.

Minden $a, b \in \mathbb{R}$ esetén

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0);$$

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0).$$

Jelölés.

Tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ esetén az $(a, 0)$ komplex szám helyett egyszerűen a-t írunk, és nem is különböztetjük meg az a valós számtól. (Úgy tekintjük, hogy $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.)
A $(0, 1)$ komplex számot pedig i jelöli a továbbiakban.

Kanonikus alak

1.6. Tétel.

Minden komplex szám előáll, mégpedig egyértelmű módon, $x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ alakban. Az (a, b) komplex szám ilyen felírásánál $x = a$ és $y = b$, azaz

$$(a, b) = a + bi.$$

1.7. Definíció.

A $z = (a, b)$ komplex szám $a + bi$ alakban való felírását z *kanonikus alak*jának, az a valós számot z *valós rész*ének, a b valós számot z *képzetes rész*ének nevezzük. Az i komplex szám neve *képzetes egység*.

Jelölés.

A z komplex szám valós részét $\operatorname{Re} z$, képzetes részét $\operatorname{Im} z$ jelöli. Tehát $z = a + bi$ esetén $\operatorname{Re} z = a$ és $\operatorname{Im} z = b$.

1.8. Állítás.

A képzetes egység négyzete: $i^2 = -1$.

1.9. Megjegyzés.

Ezután a komplex számokat nem valós számokból álló számpárokként, hanem $a + bi$ alakú formális kifejezésekként kezeljük. Ezekkel ugyanúgy lehet számolni, ahogyan betűs kifejezésekkel szoktunk, de i^2 helyett szabad (sőt, többnyire kell is!) -1-et írni. Az összeadás és a kivonás elég természetes ebben az alakban, a szorzás és a reciprokképzés pedig a következő módon végezhető el:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)\, i;$$

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{1}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} i \quad (\text{ha } a + bi \neq 0).$$

Konjugált

1.10. Definíció.

A $z = a + bi$ komplex szám *konjugált*ján az $a - bi$ komplex számot értjük.

Jelölés.

A z komplex szám konjugáltját $\overline{z}$ jelöli. Tehát $\overline{z} = \operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z \cdot i$.

1.11. Tétel.

Bármely u, v komplex számokra érvényesek az alábbiak:

(1) $\overline{\overline{u}} = u$;

(2) $\overline{u + v} = \overline{u} + \overline{v}$;

(3) $\overline{u - v} = \overline{u} - \overline{v}$;

(4) $\overline{u \cdot v} = \overline{u} \cdot \overline{v}$;

(5) $\overline{u/v} = \overline{u}/\overline{v}$, *ha* $v \neq 0$;

(6) $\overline{u} = u \iff u \in \mathbb{R}$;

(7) $u + \overline{u} = 2 \operatorname{Re} u$;

(8) $u \cdot \overline{u} = (\operatorname{Re} u)^2 + (\operatorname{Im} u)^2$.

A komplex számsík

1.12. Definíció.

Legyen adott a síkban egy Descartes-féle derékszögű koordinátarendszer, és feleltessük meg az $a + bi$ komplex számnak az (a, b) koordinátájú pontot.
Így kapjuk a *komplex számsík*ot, más néven *Gauss-féle számsík*ot.
Az első tengelyt (abszcissza) *valós tengely*nek, a második tengelyt (ordináta) pedig *képzetes tengely*nek hívjuk. A valós tengelyen találhatók a valós számok, a képzetes tengelyen pedig az úgynevezett *tiszta képzetes szám*ok.

1.13. Definíció.

A $z = a + bi$ komplex szám *abszolút érték*én a $\sqrt{a^2 + b^2}$ nemnegatív valós számot értjük.

Jelölés.

A z komplex szám abszolút értékét $|z|$ jelöli. Tehát $|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$.

1.14. Megjegyzés.

A komplex számsíkon az abszolút érték az origótól (nullától) való távolságot jelenti, a konjugálás nem más, mint a valós tengelyre való tükrözés, az összeadás pedig (hely)vektorok összeadásával írható le geometriailag.

Az abszolút érték tulajdonságai

1.15. Tétel.

Bármely u, v komplex számokra érvényesek az alábbiak:

(1) $|u| = \sqrt{u\overline{u}}$;

(2) $1/u = \overline{u}/\,|u|^2$ *ha* $u \neq 0$;

(3) $|u \cdot v| = |u| \cdot |v|$;

(4) $|u/v| = |u|\,/\,|v|$ *ha* $v \neq 0$;

(5) $|\overline{u}| = |u|$;

(6) $|u + v| \leq |u| + |v|$.

Argumentum

1.16. Definíció.

Egy nemnulla z komplex szám *argumentum*án olyan szöget értünk, amellyel a valós tengely pozitív felét az origó körül elforgatva átmegy a z-nek megfelelő ponton.

Jelölés.

A z komplex szám argumentumát $\arg z$ jelöli.

1.17. Megjegyzés.

A nullának nincs argumentuma, a nullától különböző komplex számok argumentuma pedig csak „modulo 2π", azaz 2π egész számú többszöröseitől eltekintve meghatározott.

Trigonometrikus alak

1.18. Állítás.

Bármely $0 \neq z \in \mathbb{C}$ *esetén az* $r = |z|$ *és* $\varphi = \arg z$ *jelöléssel*

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right).$$

1.19. Definíció.

A nemnulla komplex számok fenti (azaz $|z| \cdot (\cos\arg z + i\sin\arg z)$ alakú) felírását *trigonometrikus alak*nak nevezzük.

1.20. Megjegyzés.

A nullának nincs trigonometrikus alakja, hiszen argumentuma sincs, de $r = 0$ és bármely $\varphi \in \mathbb{R}$ esetén nyilván $0 = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$.

1.21. Állítás.

Bármely $r, r' \in \mathbb{R}^+$ *és* $\varphi, \varphi' \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) = r'\left(\cos\varphi' + i\sin\varphi'\right) \iff r = r' \text{ és } \exists k \in \mathbb{Z} : \varphi' = \varphi + 2k\pi.$$

Számolás trigonometrikus alakban

1.22. Tétel.

Tetszőleges nullától különböző $u = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *és* $v = s(\cos\psi + i\sin\psi)$ *komplex számokra*

1. $\overline{u} = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$;
2. $uv = rs(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi))$;
3. $\frac{1}{v} = \frac{1}{s}(\cos(-\psi) + i\sin(-\psi))$;
4. $\frac{u}{v} = \frac{r}{s}(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi))$.

1.23. Megjegyzés.

A szorzat trigonometrikus alakjára vonatkozó képletből látszik, hogy rögzített $v = \cos\psi + i\sin\psi$ esetén az $u \mapsto uv$ leképezés nem más, mint az origó körüli ψ szögű forgatás a komplex számsíkon.

1.24. Tétel (Moivre-képlet).

Bármely nemzéró $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *komplex szám és* $n \in \mathbb{Z}$ *esetén*

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$