KLASSZIKUS ALGEBRA FELADATOK[†]

2013 tavaszi félév, kiemelt gyakorlat

hétfő 11–13, Farkas terem

Komplex számok

1. feladat$^{\circ}$ Határozza meg az $\left(\frac{i-1}{2+i}\right)^2$ komplex szám kanonikus alakját.

2. feladat$^{\circ}$ Határozza meg a $3-4i$ komplex szám négyzetgyökeit kanonikus alakban.

3. feladat$^{\circ}$ Oldja meg a $(2+i)\,x^2+(5-i)\,x+(2-2i)=0$ egyenletet a komplex számok halmazán.

4. feladat$^{\circ}$ Ábrázolja a komplex számsíkon az $|\bar{z}-i|\leq 1$ egyenlőtlenséget kielégítő z komplex számok halmazát.

5. feladat$^{\circ}$ Ábrázolja a komplex számsíkon a $0\leq \arg(zi)<\pi/3$ egyenlőtlenséget kielégítő z komplex számok halmazát.

6. feladat Ábrázolja a komplex számsíkon a $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\lambda$ egyenlőséget kielégítő z komplex számok halmazát.

7. feladat$^{\circ}$ Trigonometrikus alakban számolva számítsa ki a $\left(\sqrt{3}-i\right)\left(2+2\sqrt{3}i\right)$ komplex számot. (A végeredményt adja meg kanonikus alakban is.)

8. feladat$^{\circ}$ Trigonometrikus alakban számolva számítsa ki az alábbi komplex szám értékét. (A végeredményt adja meg kanonikus alakban is.)

$$\frac{(-1+i)^{2422}}{\left(\sqrt{3}+i\right)^{1208}}$$

9. feladat Fejezze ki $\cos nx$-et $\cos x$ és $\sin x$ segítségével. (Útmutatás: Számítsuk ki a $(\cos x+i\sin x)^n$ hatványt trigonometrikus és kanonikus alakban is, majd hasonlítsuk össze a két eredményt.)

10. feladat Adjon zárt formulát a $\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx$ összegre.

11. feladat Adjon zárt formulát a $\sum_{k=0}^{500}\binom{2000}{4k}$ összegre.

12. feladat Mutassa meg, hogy $4\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-\operatorname{arctg}\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$.

13. feladat Rajzoljunk egy tetszőleges négyszög oldalaira kifelé négyzeteket. Bizonyítsa be, hogy a szemközti oldalakra rajzolt négyzetek középpontjait összekötő szakaszok egyenlő hosszúak és egymásra merőlegesek.

14. feladat Rajzoljunk egy tetszőleges háromszög oldalaira kifelé szabályos háromszögeket. Bizonyítsa be, hogy ezen háromszögek középpontjai által meghatározott háromszög szabályos.

15. feladat Igazolja, hogy az $x,y,z\in\mathbb{C}$ komplex számok által meghatározott háromszög akkor és csak akkor szabályos, ha $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$.

16. feladat$^{\circ}$ Számítsa ki $\sqrt[4]{-1-\sqrt{3}i}$ mind a négy értékét. (A végeredményt adja meg trigonometrikus és kanonikus alakban is.)

17. feladat$^{\circ}$ Számítsa ki $\sqrt[3]{i}$ mindhárom értékét. (A végeredményt adja meg trigonometrikus és kanonikus alakban is.)

18. feladat$^{\circ}$ Ábrázolja a komplex számsíkon a nyolcadik és a tizenkettedik egységgyököket, és írja fel őket trigonometrikus és kanonikus alakban. Mindegyikhez határozza meg azt az n természetes számot, amelyre primitív n-edik egységgyök.

19. feladat$^{\circ}$ Egységgyök-e a $z=\cos\frac{5\pi}{12}+i\cdot\sin\frac{5\pi}{12}$ komplex szám? Ha igen, akkor határozza meg mindazokat az n kitevőket, amelyekre z n-edik egységgyök, valamint azt az n természetes számot, amelyre z primitív n-edik egységgyök.

20. feladat Mikor lehet ε és $\varepsilon+1$ is egységgyök?

21. feladat Határozza meg az n-edik primitív egységgyökök szorzatát.

22. feladat Legyen ε egy primitív $2n$-edik egységgyök. Adjon zárt formulát az $1+\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots+\varepsilon^{n-1}$ összegre (az eredményben csak ε szerepelhet, n nem!).

23. feladat Határozza meg $\sin 72^\circ$ értékét. (Útmutatás: Tekintsük a $z=\cos 72^\circ+i\sin 72^\circ$ komplex számot. Ez primitív ötödik egységgyök, így gyöke az $x^4+x^3+x^2+x+1$ polinomnak.)

24. feladat Jelölje E_n az n-edik egységgyökök halmazát. Mutassa meg, hogy $E_m\cap E_n=E_{(m,n)}$ minden $m,n\in\mathbb{N}$ esetén.

25. feladat Határozza meg az $E_m\cdot E_n=\{uv:u\in E_n, v\in E_m\}$ halmazt tetszőleges $m,n\in\mathbb{N}$ esetén.

[†]A rutinfeladatokat $^{\circ}$ jelzi.

26. feladat Jelöleje P_n a primitív n-edik egységgyökök halmazát. Igazolja, hogy $\bigcup_{d|n} P_d = E_n$. Hogyan lehet ebből megkapni az Euler-féle φ függvény összegzési függvényét?

27. feladat Határozza meg az n-edik primitív egységgyökök összegét.

Absztrakt algebrai struktúrák

28. feladat$^{\circ}$ Gyűrűt, integritástartományt, illetve testet alkot-e az alábbi halmaz (a szokásos összeadással és szorzással)?

$$\{a+bi : a,b \in \mathbb{Z},\ a \text{ páros}\}$$

29. feladat$^{\circ}$ Gyűrűt, integritástartományt, illetve testet alkot-e az alábbi halmaz (a szokásos összeadással és szorzással)?

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \left\{a+b\sqrt{2} : a,b \in \mathbb{Q}\right\}$$

30. feladat$^{\circ}$ Gyűrűt, integritástartományt, illetve testet alkot-e az alábbi halmaz (a szokásos összeadással és szorzással)?

$$\mathbb{Z}[\omega] = \{a+b\omega : a,b \in \mathbb{Z}\} \qquad \omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

31. feladat Legyen $\xi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ egy gyöke az x^2+px+q polinomnak, ahol p és q egész számok. Mutassa meg, hogy ekkor a $\mathbb{Z}[\xi] = \{a+b\xi : a,b \in \mathbb{Z}\}$ halmaz integritástartományt alkot a szokásos összeadással és szorzással.

32. feladat Bizonyítsa be, hogy tetszőleges c pozitív konstans esetén a $(-c,c)$ intervallum csoportot alkot az alábbi $\otimes$ művelettel.

$$x \otimes y = \frac{x+y}{1+\frac{xy}{c^2}}$$

33. feladat Jelölje D_n az n pozitív egész szám pozitív osztóinak halmazát, és értelmezzünk ezen egy kétváltozós műveletet az $a*b = \frac{[a,b]}{(a,b)}$ formulával. Mutassa meg, hogy ha n négyzetmentes szám, akkor $(D_n;*)$ csoport, de ha n nem négyzetmentes, akkor $(D_n;*)$ nem csoport.

34. feladat Bizonyítsa be, hogy ha az n természetes szám nem négyzetmentes, akkor nem lehet a D_n halmazon olyan $*$ műveletet definiálni, amelyre $(D_n;*)$ csoport, és $a*b \mid [a,b]$ teljesül minden $a,b \in D_n$ esetén.

35. feladat Határozza meg a $\mathbb{Z}[\omega]$ gyűrű egységeit (lásd a 30. feladatot).

36. feladat Határozza meg a véges tizedestörtek gyűrűjének egységeit.

37. feladat Definiáljunk egy újfajta „összeadást” a pozitív valós számok halmazán: legyen $a \oplus b = a \cdot b$. Adjon meg olyan $\odot$ „szorzást”, amelyre $(\mathbb{R}^+;\oplus,\odot)$ test.

38. feladat Bizonyítsa be, hogy minden véges integritástartomány test.

39. feladat$^{\circ}$ Számítsa ki a $\mathbb{Z}_{13}$ testben a $\overline{8}+\overline{11},\ \overline{8}-\overline{11},\ \overline{8}\cdot\overline{11},\ \overline{11}/\overline{8},\ \overline{8}^{11},\ \overline{11}^{-10}$ elemeket. (Az eredmény $\overline{0},\overline{1},\ldots,\overline{12}$ valamelyike legyen.)

40. feladat Keresse meg az $x^3 = \overline{1}$ egyenlet összes megoldását a $\mathbb{Z}_5$, illetve a $\mathbb{Z}_{19}$ testben.

41. feladat$^{\circ}$ Végezzen maradékos osztást az $f = x^3+\overline{1},\ g = \overline{2}x^2-\overline{3}x+\overline{2} \in \mathbb{Z}_5[x]$ polinomokon.

42. feladat$^{\circ}$ Határozza meg az $f = x^4+x^3+x^2+\overline{1},\ g = x^3+\overline{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$ polinomok legnagyobb közös osztóját, és adja meg az $fu+gv=(f,g)$ egyenlet egy megoldását.

43. feladat$^{\circ}$ Számítsa ki az $f = x^4+x^3+2x^2+3x-3,\ g = x^4+x^3+x^2+3x-6$ polinomok legnagyobb közös osztóját, majd ennek segítségével határozza meg f és g közös gyökeit, és végül külön-külön f és g összes gyökét.

„Számelmélet” integritástartományokban

44. feladat$^{\circ}$ Oldja meg az $\mathbb{R}[x]$ polinomgyűrűben az $x^2 \cdot f \equiv x^2-2x \pmod{x^3+x}$ kongruenciát.

45. feladat Határozza meg a $8+i$ és $4-2i$ Gauss-egészek legnagyobb közös osztóját.

46. feladat$^{\circ}$ Bizonyítsa be, hogy az alábbi I halmaz ideál a $\mathbb{Z}[x]$ gyűrűben.

$$I = \{a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0 \in \mathbb{Z}[x] : a_0 \text{ páros}\}.$$

47. feladat Mutassa meg, hogy az előző feladatbeli ideál nem főideál.

48. feladat$^{\circ}$ Bizonyítsa be, hogy az $I = \left\{a+b\sqrt{-5} \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right] : a \equiv b \pmod 2\right\}$ halmaz ideál a $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]$ gyűrűben.

49. feladat Mutassa meg, hogy az előző feladatbeli ideál nem főideál.

50. feladat Határozza meg az egész számok gyűrűjében az $I = (18) \cap (30)$ ideált. (Mivel $\mathbb{Z}$ főideálgyűrű, van olyan g egész szám, amelyre $I = (g)$. Ezt a g generátort kell megtalálni.) Hogyan lehetne általánosítani?

51. feladat A $(18) \cup (30)$ halmaz nem ideál az egész számok gyűrűjében (ugye?). Melyik az a legszűkebb I ideál, amelyik tartalmazza ezt a halmazt? Hogyan lehetne általánosítani?

52. feladat Bizonyítsa be, hogy tetszőleges α komplex számra az $I = \{f \in \mathbb{C}[x] : f(\alpha) = 0\}$ halmaz ideál a $\mathbb{C}[x]$ gyűrűben, és adja meg egy generátorelemét.

53. feladat Ellenőrizze, hogy a korlátos valós számsorozatok gyűrűt alkotnak (a szokásos tagonkénti összeadással és szorzással), majd mutassa meg, hogy a nullához konvergáló sorozatok ideált alkotnak ebben a gyűrűben.

54. feladat$^{\circ}$ Írja fel a $\mathbb{Z}_2[x] / (x^2 + x + 1)$ négyelemű test összeadó- és szorzótábláját.

55. feladat$^{\circ}$ Határozza meg a $\mathbb{Z}_3[x] / (x^2 + 1)$ kilencelemű testben az $a \cdot b,\ a/b,\ b/a$ elemeket, ahol $a = \overline{x}$ és $b = \overline{x+1}$.

56. feladat$^{\circ}$ Határozza meg a $\mathbb{Z}_5[x] / (x^3 + 1)$ százhuszonötelemű testben a $\overline{2x^2 - 3x + 2}$ elem reciprokát.

57. feladat Határozza meg a 121-elemű test összes elemének összegét. Hogyan lehetne általánosítani a feladatot?

Test feletti egyhatározatlanú polinomok

58. feladat$^{\circ}$ Bézout tételének segítségével vizsgálja meg, hogy osztja-e a $g = x^2 + \sqrt{2}x + 1$ polinom az $f = x^4 + 1$ polinomot.

59. feladat$^{\circ}$ Bézout tételének segítségével vizsgálja meg, hogy teljesül-e a $g \mid f$ oszthatóság a $g = x^2 - 1$ és $f = x^{17} - x^{16} + x^{15} - x^{14} + x^7 - x^3 + x - 1$ polinomokra a $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_3$, illetve $\mathbb{Z}_7$ testek fölött.

60. feladat Határozza meg az összes olyan p prímszámot, amelyre $x^2 + \overline{1} \mid x^{2008} - \overline{23}x^{1922} + \overline{13}x^{600} + \overline{8}$ teljesül a $\mathbb{Z}_p[x]$ polinomgyűrűben.

61. feladat Az n természetes szám mely értékeire lesz $(x+1)^n - x^n - 1$ osztható $x^2 + x + 1$-gyel?

62. feladat$^{\circ}$ Adja meg az $x^5 + x + \overline{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$ polinom irreducibilis felbontását.

63. feladat$^{\circ}$ Adja meg az $x^4 + \overline{2}x^3 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_3[x]$ polinom irreducibilis felbontását.

64. feladat Adja meg az $x^p - x \in \mathbb{Z}_p[x]$ polinom irreducibilis felbontását tetszőleges p prímszám esetén.

65. feladat Igazolja, hogy az $x^p + \overline{c} \in \mathbb{Z}_p[x]$ polinom sosem irreducibilis.

66. feladat$^{\circ}$ Határozza meg az $x^6 + 27$ polinom komplex gyökeit, majd bontsa irreducibilis tényezők szorzatára $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ és $\mathbb{Q}$ felett.

67. feladat$^{\circ}$ Határozza meg az $x^8 - 16$ polinom komplex gyökeit, majd bontsa irreducibilis tényezők szorzatára $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ és $\mathbb{Q}$ felett.

68. feladat$^{\circ}$ Határozza meg az $x^4 + x^2 - 30$ polinom komplex gyökeit, majd bontsa irreducibilis tényezők szorzatára $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ és $\mathbb{Q}$ felett.

69. feladat$^{\circ}$ Határozza meg az $f = (x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)$ és $g = (x+1)(x^2+1)(x^3+1)(x^4+1)$ polinomok irreducibilis faktorizációját a kedvenc számteste felett, majd ennek segítségével számítsa ki f és g legnagyobb közös osztóját.

70. feladat Határozza meg az $x^n - 1$ és $x^m - 1$ polinomok legnagyobb közös osztóját.

71. feladat Képzelje el (de ne írja fel!) az $x^{1973} - 1997$ polinom irreducibilis felbontását $\mathbb{R}$ felett. Hány tényezőt lát (a lelki szemeivel), és hányadfokúak ezek?

72. feladat Határozza meg az egységkörbe írt szabályos n-szög egy csúcsából kiinduló átlói hosszának szorzatát. (Itt most átlónak tekintjük az oldalakat is, tehát egy csúcsból $n-1$ átló indul ki.)

73. feladat$^{\circ}$ Keresse meg az $x^6 + 2x^5 + x^4 + 22x^3 + 55x^2 + 44x + 11$ polinom racionális gyökeit, majd adja meg a $\mathbb{Q}$ feletti irreducibilis felbontását.

74. feladat$^{\circ}$ Igazolja, hogy az $x^7 - 7x^6 + 24x^5 - 50x^4 + 68x^3 - 57x^2 + 25x - 1$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett. (Útmutatás: Térjünk át az $y = x - 1$ határozatlanra.)

75. feladat Adja meg az $x^p - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom irreducibilis felbontását (p prímszám).

76. feladat Bizonyítsa be, hogy $x^4 + 1$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, de egyetlen p prímszámra sem irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ felett.

77. feladat Igazolja, hogy ha $a_1, \ldots, a_n$ páronként különböző egész számok, akkor az $(x - a_1) \cdot \ldots \cdot (x - a_n) + 1$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.

78. feladat Bizonyítsa be, hogy az $f = x^n + ax + p$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett bármely $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z}, p$ prímszám, $p > |a| + 1$ esetén. (Útmutatás: Először azt mutassuk meg, hogy f minden α gyökére $|\alpha| > 1$.)

79. feladat Legyen $f \in \mathbb{Z}[x]$ egy főpolinom, melynek konstans tagja nem nulla (azaz $f(0) \neq 0$). Tegyük fel, hogy f-nek egyetlen komplex gyöke van az egységkörön kívül, az összes többi gyöke pedig az egységkör belsejében helyezkedik el (tehát a körvonalon nincs egy gyök se). Bizonyítsa be, hogy f irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.

80. feladat Az előző feladat segítségével (vagy máshogy) mutassa meg, hogy $x^4 - x^3 - 1$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett. (Nem kell a gyököket kiszámolni, elég megbecsülni az abszolút értéküket. A valós gyököket például függvénydiszkusszó segítségével közelítőleg meghatározhatjuk.)

81. feladat$^{\circ}$ Alakítsa át az $f = x^4 + 8ix^3 - 26x^2 - 40ix + 21 \in \mathbb{C}[x]$ polinomot az $x + 2i$ polinom hatványai szerint rendezett alakba, és az elvégzett átalakítás segítségével határozza meg f gyökeit.

82. feladat$^{\circ}$ Hányszoros gyöke a 2 szám az $x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ polinomnak? Oldja meg a feladatot Horner-elrendezéssel és deriválással is.

83. feladat$^{\circ}$ Határozza meg a $3x^4 - 4x^3 + 1$ polinom többszörös gyökeit, majd adja meg a gyöktényezős felbontását.

84. feladat Határozza meg a b és c komplex paraméterek értékét úgy, hogy legyen háromszoros gyöke az $x^5 - 5x^3 + 5bx + c \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak.

85. feladat Mikor osztható egy polinom a saját deriváltjával?

86. feladat Mutassa meg, hogy az $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ polinomnak nincs többszörös gyöke a komplex számok testében.

87. feladat$^{\circ}$ Oldja meg az $x^3 + 9x - 26 = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán.

88. feladat Oldja meg az $x^3 + 9x - 26 = 0$ egyenletet a $\mathbb{Z}_{19}$ testben. (A megoldáshoz szükségünk lehet a 40. feladatra.)

89. feladat A derivált vizsgálatával igazolja, hogy az $x^3 + px + q \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak akkor és csak akkor van többszörös gyöke, ha diszkriminánsa nulla.

90. feladat Legyenek az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom komplex gyökei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Tegyük fel, hogy a gyökök páronként különbözők, és egy konvex n-szöget alkotnak a komplex számsíkon. Bizonyítsa be, hogy f' gyökei csak ennek a sokszögnek a belsejében vagy a határán helyezkedhetnek el.

91. feladat$^{\circ}$ Oldja meg az $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 3 = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán. (Segítség: A kubikus rezolvens egyik gyöke $\alpha = 2$.)

92. feladat$^{\circ}$ Határozza meg azt a legalacsonyabb fokszámú f polinomot, amelyre $f(0) = 2$, $f(1) = 3$ és $f(3) = 1$.

93. feladat Mutassa meg, hogy

$$1 - x + \frac{x(x-1)}{2} - \frac{x(x-1)(x-2)}{6} + \cdots + (-1)^n \frac{x(x-1)\cdots(x-(n-1))}{n!} = (-1)^n \frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{n!}$$

94. feladat Legyenek $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ az n-edik egységgyökök, és legyen $f \in \mathbb{C}[x]$ az $(\varepsilon_0, y_0), (\varepsilon_1, y_1), \ldots, (\varepsilon_{n-1}, y_{n-1})$ pontokra illesztett Lagrange-féle interpolációs polinom. Igazolja, hogy $f(0)$ éppen az $y_0, \ldots, y_{n-1}$ számok átlaga.

95. feladat A $(0, a_0), (1, a_1), (2, a_2)$ pontokra akkor és csak akkor illeszthető egyenes, ha $a_0 - 2a_1 + a_2 = 0$ (ugye?). Mutassa meg, hogy a $(0, a_0), (1, a_1), (2, a_2), (3, a_3)$ pontokra akkor és csak akkor illeszthető parabola (amely elfajuló esetben lehet egyenes is), ha $a_0 - 3a_1 + 3a_2 - a_3 = 0$.

96. feladat Az előző feladat általánosításaként bizonyítsa be, hogy a $(0, a_0), (1, a_1), \ldots, (n+1, a_{n+1})$ pontok akkor és csak akkor illeszkednek egy legfeljebb n-edfokú polinomfüggvény grafikonjára, ha

$$\binom{n+1}{0} a_0 - \binom{n+1}{1} a_1 + \binom{n+1}{2} a_2 + \cdots + (-1)^k \binom{n+1}{k} a_k + \cdots + (-1)^{n+1} \binom{n+1}{n+1} a_{n+1} = 0.$$

Többhatározatlanú polinomok, szimmetrikus polinomok, algebrai számok

97. feladat$^{\circ}$ Anélkül, hogy megkeresné a gyököket, határozza meg a $3x^5 + 6x^4 + 9x^3 + 2x^2 + 4x + 1$ polinom gyökeinek négyzetösszegét.

98. feladat$^{\circ}$ Írja fel az $(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_1)$ polinom tagjait lexikografikusan csökkenő sorrendben, majd fejezze ki az elemi szimmetrikus polinomok segítségével.

99. feladat Határozza meg a λ komplex paraméter értékét úgy, hogy az $x^3 - 7x + \lambda$ polinom egyik gyöke valamelyik másik gyök kétszerese legyen.

100. feladat Határozza meg a p és q komplex paraméterek értékét úgy, hogy az $x^3 - px^2 + 11x - q$ polinom gyökei egymást követő egész számok legyenek.

101. feladat$^{\circ}$ Határozza meg a $\sqrt{3 - \sqrt{6}}$ algebrai szám minimálpolinomját és konjugáltjait.

102. feladat Mutassa meg, hogy $\pi^2 + \pi$ transzcendens szám. (Fel lehet használni azt a tényt, hogy π transzcendens.)