KLASSZIKUS ALGEBRA FELADATOK[†]

2013 tavaszi félév, normál gyakorlat

hétfő 14–16, Irinyi udvari terem

Komplex számok

1. feladat$^{\circ}$ Határozza meg az $\left(\dfrac{i-1}{2+i}\right)^2$ komplex szám kanonikus alakját.

2. feladat$^{\circ}$ Határozza meg a $3-4i$ komplex szám négyzetgyökeit kanonikus alakban.

3. feladat$^{\circ}$ Oldja meg a $(2+i)\,x^2+(5-i)\,x+(2-2i)=0$ egyenletet a komplex számok halmazán.

4. feladat$^{\circ}$ Ábrázolja a komplex számsíkon az $|\bar{z}-i|\leq 1$ egyenlőtlenséget kielégítő z komplex számok halmazát.

5. feladat$^{\circ}$ Ábrázolja a komplex számsíkon a $0\leq \arg(zi)<\pi/3$ egyenlőtlenséget kielégítő z komplex számok halmazát.

6. feladat Ábrázolja a komplex számsíkon a $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)\geq 1$ egyenlőtlenséget kielégítő z komplex számok halmazát.

7. feladat$^{\circ}$ Trigonometrikus alakban számolva számítsa ki a $\left(\sqrt{3}-i\right)\left(2+2\sqrt{3}i\right)$ komplex számot. (A végeredményt adja meg kanonikus alakban is.)

8. feladat$^{\circ}$ Trigonometrikus alakban számolva számítsa ki az alábbi komplex szám értékét. (A végeredményt adja meg kanonikus alakban is.)

$$\frac{(-1+i)^{2422}}{\left(\sqrt{3}+i\right)^{1208}}$$

9. feladat Fejezze ki $\cos nx$-et $\cos x$ és $\sin x$ segítségével. (Útmutatás: Számítsuk ki a $(\cos x+i\sin x)^n$ hatványt trigonometrikus és kanonikus alakban is, majd hasonlítsuk össze a két eredményt.)

10. feladat Adjon zárt formulát az alábbi összegre. (Útmutatás: Számítsuk ki az $(1+i)^n$ hatványt trigonometrikus és kanonikus alakban is, majd hasonlítsuk össze a két eredményt.)

$$\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\binom{n}{7}+\cdots$$

11. feladat Oldja meg a $z^2+4\bar{z}=|z|^2+6$ egyenletet a komplex számok halmazán.

12. feladat Oldja meg az $i\bar{z}=z^2$ egyenletet a komplex számok halmazán.

13. feladat Mutassa meg, hogy

$$4\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-\operatorname{arctg}\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}.$$

14. feladat Rajzoljunk egy tetszőleges négyszög oldalaira kifelé négyzeteket. Bizonyítsa be, hogy a szemközti oldalakra rajzolt négyzetek középpontjait összekötő szakaszok egyenlő hosszúak és egymásra merőlegesek.

15. feladat Rajzoljunk egy tetszőleges háromszög oldalaira kifelé szabályos háromszögeket. Bizonyítsa be, hogy ezen háromszögek középpontjai által meghatározott háromszög szabályos.

16. feladat$^{\circ}$ Számítsa ki $\sqrt[4]{-1-\sqrt{3}i}$ mind a négy értékét. (A végeredményt adja meg trigonometrikus és kanonikus alakban is.)

17. feladat$^{\circ}$ Számítsa ki $\sqrt[3]{i}$ mindhárom értékét. (A végeredményt adja meg trigonometrikus és kanonikus alakban is.)

18. feladat$^{\circ}$ Ábrázolja a komplex számsíkon a nyolcadik és a tizenkettedik egységgyököket, és írja fel őket trigonometrikus és kanonikus alakban. Mindegyikhez határozza meg azt az n természetes számot, amelyre primitív n-edik egységgyök.

19. feladat$^{\circ}$ Egységgyök-e a $z=\cos\frac{5\pi}{12}+i\cdot\sin\frac{5\pi}{12}$ komplex szám? Ha igen, akkor határozza meg mindazokat az n kitevőket, amelyekre z n-edik egységgyök, valamint azt az n természetes számot, amelyre z primitív n-edik egységgyök.

20. feladat Határozza meg mindazokat a komplex számokat, amelyek huszonnegyedik és századik egységgyökök is.

21. feladat Mikor lehet ε és $\varepsilon+1$ is egységgyök?

[†]A rutinfeladatokat $^{\circ}$ jelzi.

22. feladat Határozza meg az n-edik primitív egységgyökök szorzatát.

23. feladat Határozza meg az n-edik primitív egységgyökök összegét.

24. feladat Mennyi az n-edik egységgyökök k-adik hatványainak összege?

25. feladat Hozza zárt alakra az $1+2\varepsilon+3\varepsilon^2+\dots+n\varepsilon^{n-1}$ összeget, ahol ε egy n-edik egységgyök. (Útmutatás: Szorozzuk be az összeget $(1-\varepsilon)$-nal.)

Absztrakt algebrai struktúrák

26. feladat$^{\mathrm{O}}$ Gyűrűt, integritástartományt, illetve testet alkot-e az alábbi halmaz (a szokásos összeadással és szorzással)?

$$\{a+bi : a,b\in\mathbb{Z},\ a \text{ páros}\}$$

27. feladat$^{\mathrm{O}}$ Gyűrűt, integritástartományt, illetve testet alkot-e az alábbi halmaz (a szokásos összeadással és szorzással)?

$$\mathbb{Q}\big(\sqrt{2}\big)=\big\{a+b\sqrt{2} : a,b\in\mathbb{Q}\big\}$$

28. feladat$^{\mathrm{O}}$ Gyűrűt, integritástartományt, illetve testet alkot-e az alábbi halmaz (a szokásos összeadással és szorzással)?

$$\mathbb{Z}[\omega]=\{a+b\omega : a,b\in\mathbb{Z}\}\qquad \omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

29. feladat Mutassa meg, hogy tetszőleges nemüres $S\subseteq\mathbb{R}$ esetén ekvivalens az alábbi két feltétel.
(1) $\forall a,b\in S : a+b\in S$ és $-a\in S$
(2) $\forall a,b\in S : a-b\in S$

30. feladat Határozza meg a $\mathbb{Z}[\omega]$ gyűrű egységeit (lásd a 28. feladatot).

31. feladat Keressen egy ±1-től különböző egységet a $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ gyűrűben, majd ennek segítségével konstruáljon meg végtelen sok egységet.

32. feladat Határozza meg a véges tizedestörtek gyűrűjének egységeit.

33. feladat Definiáljunk egy újfajta összeadást és egy újfajta szorzást a valós számok halmazán: legyen $a\oplus b=a+b-1$ és $a\odot b=a+b-ab$. Igazolja, hogy az $(\mathbb{R};\oplus,\odot)$ struktúra test.

34. feladat Szorozza össze az alábbi két polinomot (vagyis adja meg tetszőleges n-re x^n együtthatóját az fg polinomban).

$$\begin{aligned} f&=x^{100}+x^{99}+\dots+x^2+x+1\\ g&=100x^{100}+99x^{99}+\dots+2x^2+x \end{aligned}$$

35. feladat$^{\mathrm{O}}$ Számítsa ki a $\mathbb{Z}_{13}$ testben a $\overline{8}+\overline{11},\ \overline{8}-\overline{11},\ \overline{8}\cdot\overline{11},\ \overline{11}/\overline{8},\ \overline{8}^{11},\ \overline{11}^{-10}$ elemeket. (Az eredmény $\overline{0},\overline{1},\dots,\overline{12}$ valamelyike legyen.)

36. feladat Keresse meg az $x^3=\overline{1}$ egyenlet összes megoldását a $\mathbb{Z}_5$, illetve a $\mathbb{Z}_{19}$ testben.

37. feladat$^{\mathrm{O}}$ Végezzen maradékos osztást az $f=x^3+\overline{1},\ g=\overline{2}x^2-\overline{3}x+\overline{2}\in\mathbb{Z}_5[x]$ polinomokon.

38. feladat$^{\mathrm{O}}$ Határozza meg az $f=x^4+x^3+x^2+\overline{1},\ g=x^3+\overline{1}\in\mathbb{Z}_2[x]$ polinomok legnagyobb közös osztóját, és adja meg az $fu+gv=(f,g)$ egyenlet egy megoldását.

39. feladat$^{\mathrm{O}}$ Számítsa ki az $f=x^4+x^3+2x^2+3x-3,\ g=x^4+x^3+x^2+3x-6$ polinomok legnagyobb közös osztóját, majd ennek segítségével határozza meg f és g közös gyökeit, és végül külön-külön f és g összes gyökét.

40. feladat Legyenek a és b pozitív egész számok. Mutassa meg, hogy ha a-t b-vel osztva a maradék r, akkor (x^a-1)-et $\left(x^b-1\right)$-gyel osztva x^r-1 lesz a maradék. Ezen megfigyelés segítségével bizonyítsa be, hogy x^a-1 és x^b-1 legnagyobb közös osztója $x^{(a,b)}-1$ (mondjuk az $\mathbb{R}[x]$ polinomgyűrűben).

„Számelmélet” integritástartományokban

41. feladat$^{\mathrm{O}}$ Oldja meg az $\mathbb{R}[x]$ polinomgyűrűben az $x^2\cdot f\equiv x^2-2x \pmod{x^3+x}$ kongruenciát. (Figyelem: nem x az ismeretlen, hanem f!)

42. feladat Határozza meg a $8+i$ és $4-2i$ Gauss-egészek legnagyobb közös osztóját.

43. feladat$^{\circ}$ Bizonyítsa be, hogy az alábbi I halmaz ideál a $\mathbb{Z}[x]$ gyűrűben.

$$I = \{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x] : a_0 \text{ páros}\}.$$

44. feladat Mutassa meg, hogy az előző feladatbeli ideál nem főideál.

45. feladat$^{\circ}$ Bizonyítsa be, hogy az alábbi I halmaz ideál a $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]$ gyűrűben.

$$I = \left\{a + b\sqrt{-5} \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right] : a \equiv b \pmod 2\right\}.$$

46. feladat Mutassa meg, hogy az előző feladatbeli ideál nem főideál.

47. feladat Határozza meg az egész számok gyűrűjében az $I = (18) \cap (30)$ ideált. (Mivel $\mathbb{Z}$ főideálgyűrű, van olyan g egész szám, amelyre $I = (g)$. Ezt a g generátort kell megtalálni.) Hogyan lehetne általánosítani?

48. feladat Bizonyítsa be, hogy tetszőleges z komplex számra az

$$I = \left\{k \in \mathbb{Z} : z^k = 1\right\}$$

halmaz ideál az egész számok gyűrűjében, továbbá amennyiben z primitív n-edik egységgyök, akkor $I = (n)$.

49. feladat Bizonyítsa be, hogy tetszőleges α komplex számra az alábbi halmaz ideál a $\mathbb{C}[x]$ gyűrűben és adja meg egy generátorelemét.

$$I = \{f \in \mathbb{C}[x] : f(\alpha) = 0\}.$$

50. feladat Ellenőrizze, hogy a korlátos valós számsorozatok gyűrűt alkotnak (a szokásos tagonkénti összeadással és szorzással), majd mutassa meg, hogy a nullához konvergáló sorozatok ideált alkotnak ebben a gyűrűben.

51. feladat$^{\circ}$ Írja fel a $\mathbb{Z}_2[x] / \left(x^2 + x + 1\right)$ négyelemű test összeadó- és szorzótábláját.

52. feladat$^{\circ}$ Határozza meg a $\mathbb{Z}_3[x] / \left(x^2 + 1\right)$ kilencelemű testben az $a \cdot b,\ a/b,\ b/a$ elemeket, ahol $a = \overline{x}$ és $b = \overline{x+1}$.

53. feladat$^{\circ}$ Határozza meg a $\mathbb{Z}_5[x] / \left(x^3 + 1\right)$ százhuszonötelemű testben a $\overline{2x^2 - 3x + 2}$ elem reciprokát.

Test feletti egyhatározatlanú polinomok

54. feladat$^{\circ}$ Bézout tételének segítségével vizsgálja meg, hogy osztja-e a $g = x^2 + \sqrt{2}x + 1$ polinom az $f = x^4 + 1$ polinomot.

55. feladat$^{\circ}$ Bézout tételének segítségével vizsgálja meg, hogy teljesül-e a $g \mid f$ oszthatóság a $g = x^2 - 1$ és $f = x^{17} - x^{16} + x^{15} - x^{14} + x^7 - x^3 + x - 1$ polinomokra a $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_3$, illetve $\mathbb{Z}_7$ testek fölött.

56. feladat Mely n pozitív egészekre osztható az $x^n + 1$ polinom az $x^2 + 1$ polinommal?

57. feladat Határozza meg az összes olyan p prímszámot, amelyre $x^2 + \overline{1} \mid x^{2008} - \overline{23}x^{1922} + \overline{13}x^{600} + \overline{8}$ teljesül a $\mathbb{Z}_p[x]$ polinomgyűrűben.

58. feladat Igazolja, hogy $x^2 + x + 1$ akkor és csak akkor osztója az $x^{2n} + x^n + 1$ polinomnak, ha n nem osztható 3-mal.

59. feladat$^{\circ}$ Adja meg az $x^5 + x + \overline{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$ polinom irreducibilis felbontását.

60. feladat$^{\circ}$ Adja meg az $x^4 + \overline{2}x^3 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_3[x]$ polinom irreducibilis felbontását.

61. feladat Adja meg az $x^p - x \in \mathbb{Z}_p[x]$ polinom irreducibilis felbontását tetszőleges p prímszám esetén.

62. feladat Hány másodfokú irreducibilis polinom van $\mathbb{Z}_p[x]$-ben?

63. feladat$^{\circ}$ Határozza meg az $x^6 + 27$ polinom komplex gyökeit, majd bontsa irreducibilis tényezők szorzatára $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ és $\mathbb{Q}$ felett.

64. feladat$^{\circ}$ Határozza meg az $x^8 - 16$ polinom komplex gyökeit, majd bontsa irreducibilis tényezők szorzatára $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ és $\mathbb{Q}$ felett.

65. feladat$^{\circ}$ Határozza meg az $x^4 + x^2 - 30$ polinom komplex gyökeit, majd bontsa irreducibilis tényezők szorzatára $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ és $\mathbb{Q}$ felett.

66. feladat$^{\circ}$ Határozza meg az $f = (x-1)\left(x^2-1\right)\left(x^3-1\right)\left(x^4-1\right)$ és $g = (x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^3+1\right)\left(x^4+1\right)$ polinomok irreducibilis faktorizációját a kedvenc számteste felett, majd ennek segítségével számítsa ki f és g legnagyobb közös osztóját.

67. feladat Képzelje el (de ne írja fel!) az $x^{100}-1$ és x^8-1 polinomok gyöktényezős alakját, majd határozza meg ennek segítségével a legnagyobb közös osztójukat. (A 40. feladatot nem ér felhasználni!)

68. feladat Képzelje el (de ne írja fel!) az $x^{1973}-1997$ polinom irreducibilis felbontását $\mathbb{R}$ felett. Hány tényezőt lát (a lelki szemeivel), és hányadfokúak ezek?

69. feladat$^{\circ}$ Keresse meg az $x^6+2x^5+x^4+22x^3+55x^2+44x+11$ polinom racionális gyökeit, majd adja meg a $\mathbb{Q}$ feletti irreducibilis felbontását.

70. feladat$^{\circ}$ Igazolja, hogy az $x^7-7x^6+24x^5-50x^4+68x^3-57x^2+25x-1$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett. (Útmutatás: Térjünk át az $y=x-1$ határozatlanra.)

71. feladat Bizonyítsa be, hogy tetszőleges T test és tetszőleges $a_0,a_1,\ldots,a_{n-1},a_n\in T$, $a_0,a_n\neq 0$ elemek esetén az $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in T[x]$ polinom akkor és csak akkor irreducibilis, ha $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ is az.

72. feladat Adjon meg végtelen sok olyan n egész számot, melyre az $x^2+100x+n$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, és végtelen sok olyat is, amelyre nem irreducibilis.

73. feladat$^{\circ}$ Alakítsa át az $f=x^4+8ix^3-26x^2-40ix+21\in\mathbb{C}[x]$ polinomot az $x+2i$ polinom hatványai szerint rendezett alakba, és az elvégzett átalakítás segítségével határozza meg f gyökeit.

74. feladat$^{\circ}$ Hányszoros gyöke a 2 szám az $x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$ polinomnak? Oldja meg a feladatot Horner-elrendezéssel és deriválással is.

75. feladat$^{\circ}$ Határozza meg a $3x^4-4x^3+1$ polinom többszörös gyökeit, majd adja meg a gyöktényezős felbontását.

76. feladat Az a valós paraméter mely értékeire lesz a -1 kétszeres gyöke az x^5-ax^2-ax+1 polinomnak?

77. feladat Határozza meg a b és c komplex paraméterek értékét úgy, hogy legyen háromszoros gyöke az $x^5-5x^3+5bx+c\in\mathbb{C}[x]$ polinomnak.

78. feladat Határozza meg az A,B valós paraméterek azon értékeit, amelyekre az 1 kétszeres gyöke az $Ax^n+Bx^{n-1}+1$ polinomnak ($n\geq 2$ tetszőleges adott természetes szám).

79. feladat Mikor osztható egy polinom a saját deriváltjával?

80. feladat$^{\circ}$ Oldja meg az $x^3+9x-26=0$ egyenletet a komplex számok halmazán.

81. feladat Oldja meg az $x^3+9x-26=0$ egyenletet a $\mathbb{Z}_{19}$ testben. (A megoldáshoz szükségünk lehet a 36. feladatra.)

82. feladat A derivált vizsgálatával igazolja, hogy az $x^3+px+q\in\mathbb{C}[x]$ polinomnak akkor és csak akkor van többszörös gyöke, ha diszkriminánsa nulla.

83. feladat$^{\circ}$ Oldja meg az $x^4-2x^3+4x^2-2x+3=0$ egyenletet a komplex számok halmazán. (Segítség: A kubikus rezolvens egyik gyöke $\alpha=2$.)

84. feladat$^{\circ}$ Határozza meg azt a legalacsonyabb fokszámú f polinomot, amelyre $f(0)=2$, $f(1)=3$ és $f(3)=1$.

85. feladat A $(0,a_0),(1,a_1),(2,a_2)$ pontokra akkor és csak akkor illeszthető egyenes, ha $a_0-2a_1+a_2=0$ (ugye?). Mutassa meg, hogy a $(0,a_0),(1,a_1),(2,a_2),(3,a_3)$ pontokra akkor és csak akkor illeszthető parabola (amely elfajuló esetben lehet egyenes is), ha $a_0-3a_1+3a_2-a_3=0$.

Többhatározatlanú polinomok, szimmetrikus polinomok, algebrai számok

86. feladat$^{\circ}$ Anélkül, hogy megkeresné a gyököket, határozza meg a $3x^5+6x^4+9x^3+2x^2+4x+1$ polinom gyökeinek négyzetösszegét.

87. feladat$^{\circ}$ Írja fel az $(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)$ polinom tagjait lexikografikusan csökkenő sorrendben, majd fejezze ki az elemi szimmetrikus polinomok segítségével.

88. feladat Határozza meg a λ komplex paraméter értékét úgy, hogy az $x^3-7x+\lambda$ polinom egyik gyöke valamelyik másik gyök kétszerese legyen.

89. feladat Határozza meg a p és q komplex paraméterek értékét úgy, hogy az $x^3-px^2+11x-q$ polinom gyökei egymást követő egész számok legyenek.

90. feladat$^{\circ}$ Határozza meg a $\sqrt{3-\sqrt{6}}$ algebrai szám minimálpolinomját és konjugáltjait.