Klasszikus algebra előadás

Waldhauser Tamás
2013 április 18.

Egyetemi Tavasz a Bolyai Intézetben

Reklám

Egyetemi Tavasz a Bolyai Intézetben

Kiss Árpád terem (Rerrich tér)
szombaton 10:30-tól

Egyetemi Tavasz a Bolyai Intézetben

Kiss Árpád terem (Rerrich tér)
szombaton 10:30-tól

érdekes előadások

Egyetemi Tavasz a Bolyai Intézetben

Kiss Árpád terem (Rerrich tér)
szombaton 10:30-tól

érdekes előadások, sudoku verseny

Egyetemi Tavasz a Bolyai Intézetben

Kiss Árpád terem (Rerrich tér)
szombaton 10:30-tól

érdekes előadások, sudoku verseny, logikai játékok és

Reklám

Egyetemi Tavasz a Bolyai Intézetben

Kiss Árpád terem (Rerrich tér)
szombaton 10:30-tól

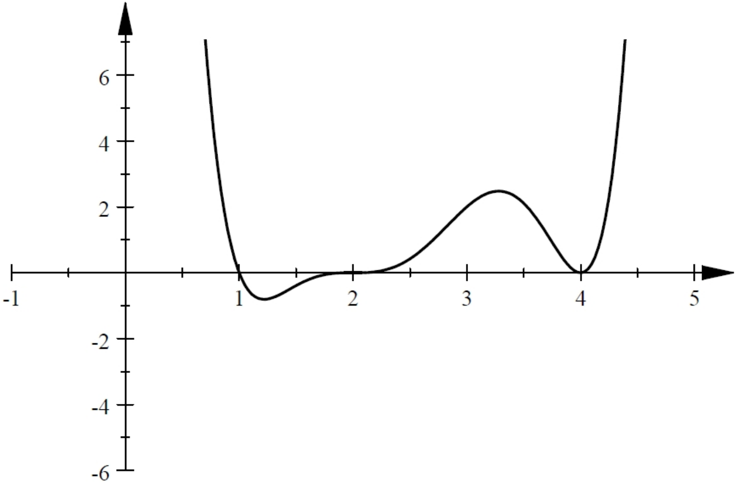
érdekes előadások, sudoku verseny, logikai játékok és

ingyen pizza!

Derivált, többszörös gyökök

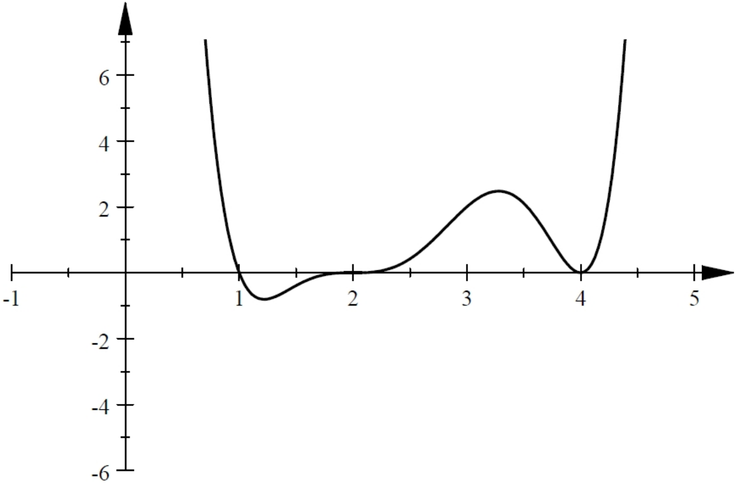
Valós polinomfüggvény deriváltja

$f = x^6 - 15x^5 + 90x^4 - 276x^3 + 456x^2 - 384x + 128$



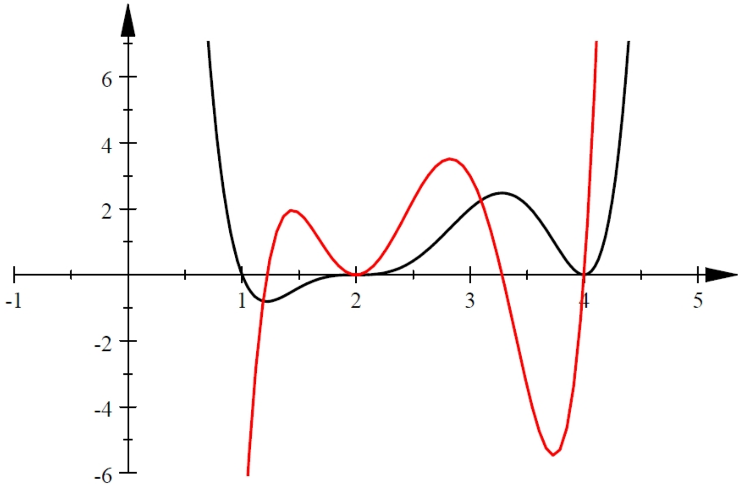
Valós polinomfüggvény deriváltja

$$f = x^6 - 15x^5 + 90x^4 - 276x^3 + 456x^2 - 384x + 128 = (x-1)(x-2)^3(x-4)^2$$



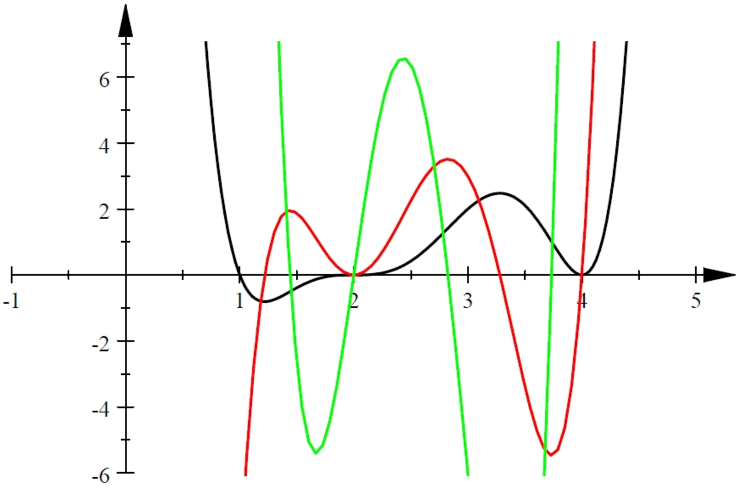
Valós polinomfüggvény deriváltja

$f = x^6 - 15x^5 + 90x^4 - 276x^3 + 456x^2 - 384x + 128 = (x-1)(x-2)^3(x-4)^2$
$f' = 6x^5 - 75x^4 + 360x^3 - 828x^2 + 912x - 384$



Valós polinomfüggvény deriváltja

$f = x^6 - 15x^5 + 90x^4 - 276x^3 + 456x^2 - 384x + 128 = (x-1)(x-2)^3(x-4)^2$
$f' = 6x^5 - 75x^4 + 360x^3 - 828x^2 + 912x - 384$
$f'' = 30x^4 - 300x^3 + 1080x^2 - 1656x + 912$



Polinom deriváltja

4.36. Definíció

Az $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in T[x]$ polinom **deriváltján** az

$$f' = na_n x^{n-1} + \cdots + 2a_2 x + a_1 \in T[x]$$

polinomot értjük.

Polinom deriváltja

4.36. Definíció

Az $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in T[x]$ polinom **deriváltján** az

$$f' = n a_n x^{n-1} + \cdots + 2 a_2 x + a_1 \in T[x]$$

polinomot értjük.
Az f polinom k-adik deriváltját $f^{(k)}$ jelöli.

Polinom deriváltja

4.36. Definíció

Az $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in T[x]$ polinom **deriváltján** az

$$f' = n a_n x^{n-1} + \cdots + 2 a_2 x + a_1 \in T[x]$$

polinomot értjük.
Az f polinom k-adik deriváltját $f^{(k)}$ jelöli.

4.37. Tétel

Minden $f, g \in T[x]$ polinomra és k pozitív egész számra érvényesek az alábbi deriválási szabályok:

(1) $(f+g)' = f' + g'$;

Polinom deriváltja

4.36. Definíció

Az $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in T[x]$ polinom **derivált**ján az

$$f' = n a_n x^{n-1} + \cdots + 2a_2 x + a_1 \in T[x]$$

polinomot értjük.
Az f polinom k-adik deriváltját $f^{(k)}$ jelöli.

4.37. Tétel

Minden $f, g \in T[x]$ polinomra és k pozitív egész számra érvényesek az alábbi deriválási szabályok:

(1) $(f+g)' = f' + g'$;

(2) $(fg)' = f'g + fg'$;

Polinom deriváltja

4.36. Definíció

Az $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in T[x]$ polinom **deriváltján** az

$$f' = n a_n x^{n-1} + \cdots + 2 a_2 x + a_1 \in T[x]$$

polinomot értjük.
Az f polinom k-adik deriváltját $f^{(k)}$ jelöli.

4.37. Tétel

Minden $f, g \in T[x]$ polinomra és k pozitív egész számra érvényesek az alábbi deriválási szabályok:

(1) $(f+g)' = f' + g'$;
(2) $(fg)' = f'g + fg'$;
(3) $(f^k)' = k \cdot f^{k-1} \cdot f'$.

Polinom deriváltja

4.36. Definíció

Az $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in T[x]$ polinom **deriváltján** az

$$f' = na_n x^{n-1} + \cdots + 2a_2 x + a_1 \in T[x]$$

polinomot értjük.
Az f polinom k-adik deriváltját $f^{(k)}$ jelöli.

4.37. Tétel

Minden $f, g \in T[x]$ polinomra és k pozitív egész számra érvényesek az alábbi deriválási szabályok:

(1) $(f+g)' = f' + g'$;
(2) $(fg)' = f'g + fg'$;
(3) $(f^k)' = k \cdot f^{k-1} \cdot f'$.

Bizonyítás.

A fenti definíció alapján „egyszerű'' számolással ellenőrizhető (nem kell hozzá határérték!).

Polinom deriváltja

4.36. Definíció

Az $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in T[x]$ polinom **deriváltj**án az

$$f' = n a_n x^{n-1} + \cdots + 2a_2 x + a_1 \in T[x]$$

polinomot értjük.
Az f polinom k-adik deriváltját $f^{(k)}$ jelöli.

4.37. Tétel

Minden $f, g \in T[x]$ polinomra és k pozitív egész számra érvényesek az alábbi deriválási szabályok:

(1) $(f+g)' = f' + g'$;
(2) $(fg)' = f'g + fg'$;
(3) $(f^k)' = k \cdot f^{k-1} \cdot f'$.

Bizonyítás.

A fenti definíció alapján „egyszerű" számolással ellenőrizhető (nem kell hozzá határérték!). Például, ha már (1) megvan, akkor (2)-ben elég **monomok**kal foglalkozni.

Polinom deriváltja

Bizonyítás (folyt.)

$$f = a \cdot x^k \qquad g = b \cdot x^l$$

Polinom deriváltja

Bizonyítás (folyt.)

$$f = a \cdot x^k \qquad g = b \cdot x^l \qquad fg = ab \cdot x^{k+l}$$

Polinom deriváltja

Bizonyítás (folyt.)

$$f = a \cdot x^k \qquad g = b \cdot x^l \qquad fg = ab \cdot x^{k+l}$$
$$f' =$$

Polinom deriváltja

Bizonyítás (folyt.)

$$
\begin{aligned}
f &= a \cdot x^k & \qquad g &= b \cdot x^l & \qquad fg &= ab \cdot x^{k+l} \\
f' &= ka \cdot x^{k-1} & & & &
\end{aligned}
$$

Polinom deriváltja

Bizonyítás (folyt.)

$$\begin{aligned} f &= a \cdot x^k & g &= b \cdot x^l & fg &= ab \cdot x^{k+l} \\ f' &= ka \cdot x^{k-1} & g' &= \end{aligned}$$

Polinom deriváltja

Bizonyítás (folyt.)

$$
\begin{aligned}
f &= a \cdot x^k & g &= b \cdot x^l & fg &= ab \cdot x^{k+l} \\
f' &= ka \cdot x^{k-1} & g' &= lb \cdot x^{l-1} & &
\end{aligned}
$$

Polinom deriváltja

Bizonyítás (folyt.)

$$\begin{array}{lll} f = a \cdot x^k & g = b \cdot x^l & fg = ab \cdot x^{k+l} \\ f' = ka \cdot x^{k-1} & g' = lb \cdot x^{l-1} & (fg)' = \end{array}$$

Polinom deriváltja

Bizonyítás (folyt.)

$$\begin{aligned} f &= a \cdot x^k & g &= b \cdot x^l & fg &= ab \cdot x^{k+l} \\ f' &= ka \cdot x^{k-1} & g' &= lb \cdot x^{l-1} & (fg)' &= (k+l)\,ab \cdot x^{k+l-1} \end{aligned}$$

Polinom deriváltja

Bizonyítás (folyt.)

$$\begin{aligned} f &= a \cdot x^k & g &= b \cdot x^l & fg &= ab \cdot x^{k+l} \\ f' &= ka \cdot x^{k-1} & g' &= lb \cdot x^{l-1} & (fg)' &= (k+l)\, ab \cdot x^{k+l-1} \end{aligned}$$

Ezek alapján

$$f'g + fg' =$$

Polinom deriváltja

Bizonyítás (folyt.)

$$\begin{array}{llll} f &= a \cdot x^k & g &= b \cdot x^l & fg &= ab \cdot x^{k+l} \\ f' &= ka \cdot x^{k-1} & g' &= lb \cdot x^{l-1} & (fg)' &= (k+l)\, ab \cdot x^{k+l-1} \end{array}$$

Ezek alapján

$$f'g + fg' = kax^{k-1} \cdot bx^l + ax^k \cdot lbx^{l-1}$$

Polinom deriváltja

Bizonyítás (folyt.)

$$\begin{aligned} f &= a\cdot x^k & g &= b\cdot x^l & fg &= ab\cdot x^{k+l} \\ f' &= ka\cdot x^{k-1} & g' &= lb\cdot x^{l-1} & (fg)' &= (k+l)\,ab\cdot x^{k+l-1} \end{aligned}$$

Ezek alapján

$$\begin{aligned} f'g+fg' &= kax^{k-1}\cdot bx^l + ax^k\cdot lbx^{l-1} \\ &= kab\cdot x^{k-1+l} + lab\cdot x^{k+l-1} \end{aligned}$$

Polinom deriváltja

Bizonyítás (folyt.)

$$\begin{array}{rclrclrcl} f &=& a\cdot x^k & g &=& b\cdot x^l & fg &=& ab\cdot x^{k+l} \\ f' &=& ka\cdot x^{k-1} & g' &=& lb\cdot x^{l-1} & (fg)' &=& (k+l)\,ab\cdot x^{k+l-1} \end{array}$$

Ezek alapján

$$\begin{aligned} f'g+fg' &= kax^{k-1}\cdot bx^l + ax^k\cdot lbx^{l-1} \\ &= kab\cdot x^{k-1+l} + lab\cdot x^{k+l-1} \\ &= (kab+lab)\cdot x^{k+l-1} \end{aligned}$$

Polinom deriváltja

Bizonyítás (folyt.)

$$\begin{array}{rclcrclcrcl} f & = & a \cdot x^k & & g & = & b \cdot x^l & & fg & = & ab \cdot x^{k+l} \\ f' & = & ka \cdot x^{k-1} & & g' & = & lb \cdot x^{l-1} & & (fg)' & = & (k+l)\,ab \cdot x^{k+l-1} \end{array}$$

Ezek alapján

$$\begin{aligned} f'g + fg' &= kax^{k-1} \cdot bx^l + ax^k \cdot lbx^{l-1} \\ &= kab \cdot x^{k-1+l} + lab \cdot x^{k+l-1} \\ &= (kab + lab) \cdot x^{k+l-1} \\ &= (k+l)\,ab \cdot x^{k+l-1}. \end{aligned}$$

$\square$

Derivált és többszörös gyökök

4.38. Tétel

Ha $k \geq 1$ és az α komplex szám k-szoros gyöke az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak, akkor $k-1$-szeres gyöke f'-nak. (Ha $k = 1$, akkor α nem gyöke f'-nak.)

4.38. Tétel

Ha $k \geq 1$ és az α komplex szám k-szoros gyöke az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak, akkor $k-1$-szeres gyöke f'-nak. (Ha $k=1$, akkor α nem gyöke f'-nak.)

Bizonyítás.

Ha az α gyök multiplicitása k, akkor

$$f = (x-\alpha)^k \cdot g,$$

4.38. Tétel

Ha $k \geq 1$ és az α komplex szám k-szoros gyöke az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak, akkor $k-1$-szeres gyöke f'-nak. (Ha $k = 1$, akkor α nem gyöke f'-nak.)

Bizonyítás.

Ha az α gyök multiplicitása k, akkor

$$f = (x - \alpha)^k \cdot g, \text{ ahol } g(\alpha) \neq 0.$$

Derivált és többszörös gyökök

4.38. Tétel

Ha $k \geq 1$ és az α komplex szám k-szoros gyöke az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak, akkor $k-1$-szeres gyöke f'-nak. (Ha $k = 1$, akkor α nem gyöke f'-nak.)

Bizonyítás.

Ha az α gyök multiplicitása k, akkor

$$f = (x-\alpha)^k \cdot g, \text{ ahol } g(\alpha) \neq 0.$$

Deriváljunk!

Derivált és többszörös gyökök

4.38. Tétel

Ha $k \geq 1$ és az α komplex szám k-szoros gyöke az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak, akkor $k-1$-szeres gyöke f'-nak. (Ha $k = 1$, akkor α nem gyöke f'-nak.)

Bizonyítás.

Ha az α gyök multiplicitása k, akkor

$$f = (x-\alpha)^k \cdot g, \text{ ahol } g(\alpha) \neq 0.$$

Deriváljunk!

$$f' = k(x-\alpha)^{k-1} \cdot g + (x-\alpha)^k \cdot g'$$

Derivált és többszörös gyökök

4.38. Tétel

Ha $k \geq 1$ és az α komplex szám k-szoros gyöke az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak, akkor $k-1$-szeres gyöke f'-nak. (Ha $k=1$, akkor α nem gyöke f'-nak.)

Bizonyítás.

Ha az α gyök multiplicitása k, akkor

$$f = (x-\alpha)^k \cdot g, \text{ ahol } g(\alpha) \neq 0.$$

Deriváljunk!

$$\begin{aligned} f' &= k(x-\alpha)^{k-1} \cdot g + (x-\alpha)^k \cdot g' \\ &= (x-\alpha)^{k-1} \cdot \left(kg + (x-\alpha) g'\right). \end{aligned}$$

Derivált és többszörös gyökök

4.38. Tétel

Ha $k \geq 1$ és az α komplex szám k-szoros gyöke az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak, akkor $k-1$-szeres gyöke f'-nak. (Ha $k = 1$, akkor α nem gyöke f'-nak.)

Bizonyítás.

Ha az α gyök multiplicitása k, akkor

$$f = (x-\alpha)^k \cdot g, \text{ ahol } g(\alpha) \neq 0.$$

Deriváljunk!

$$\begin{aligned} f' &= k(x-\alpha)^{k-1} \cdot g + (x-\alpha)^k \cdot g' \\ &= (x-\alpha)^{k-1} \cdot \left(kg + (x-\alpha)g'\right). \end{aligned}$$

Tehát α 

Derivált és többszörös gyökök

4.38. Tétel

Ha $k \geq 1$ és az α komplex szám k-szoros gyöke az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak, akkor $k-1$-szeres gyöke f'-nak. (Ha $k=1$, akkor α nem gyöke f'-nak.)

Bizonyítás.

Ha az α gyök multiplicitása k, akkor

$$f = (x-\alpha)^k \cdot g, \text{ ahol } g(\alpha) \neq 0.$$

Deriváljunk!

$$\begin{aligned} f' &= k(x-\alpha)^{k-1} \cdot g + (x-\alpha)^k \cdot g' \\ &= (x-\alpha)^{k-1} \cdot \left(kg + (x-\alpha)g'\right). \end{aligned}$$

Tehát α legalább $(k-1)$-szeres gyöke f'-nak.

4.38. Tétel

Ha $k \geq 1$ és az α komplex szám k-szoros gyöke az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak, akkor $k-1$-szeres gyöke f'-nak. (Ha $k = 1$, akkor α nem gyöke f'-nak.)

Bizonyítás.

Ha az α gyök multiplicitása k, akkor

$$f = (x-\alpha)^k \cdot g, \text{ ahol } g(\alpha) \neq 0.$$

Deriváljunk!

$$\begin{aligned} f' &= k(x-\alpha)^{k-1} \cdot g + (x-\alpha)^k \cdot g' \\ &= (x-\alpha)^{k-1} \cdot \left(kg + (x-\alpha)g'\right). \end{aligned}$$

Tehát α legalább $(k-1)$-szeres gyöke f'-nak. Hogy pontosan $(k-1)$-szeres gyöke legyen, ahhoz az kell, hogy

Derivált és többszörös gyökök

4.38. Tétel

Ha $k \geq 1$ és az α komplex szám k-szoros gyöke az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak, akkor $k-1$-szeres gyöke f'-nak. (Ha $k=1$, akkor α nem gyöke f'-nak.)

Bizonyítás.

Ha az α gyök multiplicitása k, akkor

$$f = (x-\alpha)^k \cdot g, \text{ ahol } g(\alpha) \neq 0.$$

Deriváljunk!

$$\begin{aligned} f' &= k(x-\alpha)^{k-1} \cdot g + (x-\alpha)^k \cdot g' \\ &= (x-\alpha)^{k-1} \cdot \color{blue}{(kg + (x-\alpha)g')}. \end{aligned}$$

Tehát α legalább $(k-1)$-szeres gyöke f'-nak. Hogy pontosan $(k-1)$-szeres gyöke legyen, ahhoz az kell, hogy a kék polinomnak már ne legyen gyöke:

Derivált és többszörös gyökök

4.38. Tétel

Ha $k \geq 1$ és az α komplex szám k-szoros gyöke az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak, akkor $k-1$-szeres gyöke f'-nak. (Ha $k = 1$, akkor α nem gyöke f'-nak.)

Bizonyítás.

Ha az α gyök multiplicitása k, akkor

$$f = (x-\alpha)^k \cdot g, \text{ ahol } g(\alpha) \neq 0.$$

Deriváljunk!

$$\begin{aligned} f' &= k(x-\alpha)^{k-1} \cdot g + (x-\alpha)^k \cdot g' \\ &= (x-\alpha)^{k-1} \cdot \left(kg + (x-\alpha)g'\right). \end{aligned}$$

Tehát α legalább $(k-1)$-szeres gyöke f'-nak. Hogy pontosan $(k-1)$-szeres gyöke legyen, ahhoz az kell, hogy a kék polinomnak már ne legyen gyöke:

$$kg(\alpha) + (\alpha-\alpha)g'(\alpha) =$$

Derivált és többszörös gyökök

4.38. Tétel

Ha $k \geq 1$ és az α komplex szám k-szoros gyöke az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak, akkor $k-1$-szeres gyöke f'-nak. (Ha $k = 1$, akkor α nem gyöke f'-nak.)

Bizonyítás.

Ha az α gyök multiplicitása k, akkor

$$f = (x-\alpha)^k \cdot g, \text{ ahol } g(\alpha) \neq 0.$$

Deriváljunk!

$$\begin{aligned} f' &= k(x-\alpha)^{k-1} \cdot g + (x-\alpha)^k \cdot g' \\ &= (x-\alpha)^{k-1} \cdot \left(kg + (x-\alpha)\, g'\right). \end{aligned}$$

Tehát α legalább $(k-1)$-szeres gyöke f'-nak. Hogy pontosan $(k-1)$-szeres gyöke legyen, ahhoz az kell, hogy a kék polinomnak már ne legyen gyöke:

$$kg(\alpha) + (\alpha - \alpha)\, g'(\alpha) = kg(\alpha)$$

Derivált és többszörös gyökök

4.38. Tétel

Ha $k \geq 1$ és az α komplex szám k-szoros gyöke az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak, akkor $k-1$-szeres gyöke f'-nak. (Ha $k = 1$, akkor α nem gyöke f'-nak.)

Bizonyítás.

Ha az α gyök multiplicitása k, akkor

$$f = (x-\alpha)^k \cdot g, \text{ ahol } g(\alpha) \neq 0.$$

Deriváljunk!

$$\begin{aligned} f' &= k(x-\alpha)^{k-1} \cdot g + (x-\alpha)^k \cdot g' \\ &= (x-\alpha)^{k-1} \cdot \left(kg + (x-\alpha)g'\right). \end{aligned}$$

Tehát α legalább $(k-1)$-szeres gyöke f'-nak. Hogy pontosan $(k-1)$-szeres gyöke legyen, ahhoz az kell, hogy a kék polinomnak már ne legyen gyöke:

$$kg(\alpha) + (\alpha-\alpha)g'(\alpha) = kg(\alpha) \neq 0. \qquad \square$$

Derivált és többszörös gyökök

4.39. Megjegyzés

Az előző tétel megfordítása nem igaz:

Derivált és többszörös gyökök

4.39. Megjegyzés

Az előző tétel megfordítása nem igaz: f'-nak lehetnek olyan gyökei is, amelyekért nem f a „felelős”.

Derivált és többszörös gyökök

4.39. Megjegyzés

Az előző tétel megfordítása nem igaz: f'-nak lehetnek olyan gyökei is, amelyekért nem f a „felelős”. 

4.40. Következmény

Az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom α gyökének multiplicitása nem más, mint a legkisebb olyan k nemnegatív egész, amelyre $f^{(k)}(\alpha) \neq 0$,

Derivált és többszörös gyökök

4.39. Megjegyzés

Az előző tétel megfordítása nem igaz: f'-nak lehetnek olyan gyökei is, amelyekért nem f a „felelős”.

4.40. Következmény

Az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom α gyökének multiplicitása nem más, mint a legkisebb olyan k nemnegatív egész, amelyre $f^{(k)}(\alpha) \neq 0$, azaz α akkor és csak akkor k-szoros gyök, ha

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \ldots = f^{(k-1)}(\alpha) = 0, \quad \text{de} \quad f^{(k)}(\alpha) \neq 0.$$

Derivált és többszörös gyökök

4.39. Megjegyzés

Az előző tétel megfordítása nem igaz: f'-nak lehetnek olyan gyökei is, amelyekért nem f a „felelős”.

4.40. Következmény

Az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom α gyökének multiplicitása nem más, mint a legkisebb olyan k nemnegatív egész, amelyre $f^{(k)}(\alpha) \neq 0$, azaz α akkor és csak akkor k-szoros gyök, ha

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \ldots = f^{(k-1)}(\alpha) = 0, \quad \text{de} \quad f^{(k)}(\alpha) \neq 0.$$

Bizonyítás.

α k-szoros gyöke f-nek

Derivált és többszörös gyökök

4.39. Megjegyzés

Az előző tétel megfordítása nem igaz: f'-nak lehetnek olyan gyökei is, amelyekért nem f a „felelős”.

4.40. Következmény

Az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom α gyökének multiplicitása nem más, mint a legkisebb olyan k nemnegatív egész, amelyre $f^{(k)}(\alpha) \neq 0$, azaz α akkor és csak akkor k-szoros gyök, ha

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \ldots = f^{(k-1)}(\alpha) = 0, \quad \text{de} \quad f^{(k)}(\alpha) \neq 0.$$

Bizonyítás.

$$\begin{array}{llll} & \alpha & k\text{-szoros gyöke} & f\text{-nek} \\ \Longrightarrow & \alpha & (k-1)\text{-szeres gyöke} & f'\text{-nak} \end{array}$$

Derivált és többszörös gyökök

4.39. Megjegyzés

Az előző tétel megfordítása nem igaz: f'-nak lehetnek olyan gyökei is, amelyekért nem f a „felelős".

4.40. Következmény

Az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom α gyökének multiplicitása nem más, mint a legkisebb olyan k nemnegatív egész, amelyre $f^{(k)}(\alpha) \neq 0$, azaz α akkor és csak akkor k-szoros gyök, ha

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \ldots = f^{(k-1)}(\alpha) = 0, \quad \text{de} \quad f^{(k)}(\alpha) \neq 0.$$

Bizonyítás.

$$\begin{array}{llll} & \alpha & k\text{-szoros gyöke} & f\text{-nek} \\ \Longrightarrow & \alpha & (k-1)\text{-szeres gyöke} & f'\text{-nak} \\ \Longrightarrow & \alpha & (k-2)\text{-szörös gyöke} & f''\text{-nak} \end{array}$$

Derivált és többszörös gyökök

4.39. Megjegyzés

Az előző tétel megfordítása nem igaz: f'-nak lehetnek olyan gyökei is, amelyekért nem f a „felelős”.

4.40. Következmény

Az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom α gyökének multiplicitása nem más, mint a legkisebb olyan k nemnegatív egész, amelyre $f^{(k)}(\alpha) \neq 0$, azaz α akkor és csak akkor k-szoros gyök, ha

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \ldots = f^{(k-1)}(\alpha) = 0, \quad \text{de} \quad f^{(k)}(\alpha) \neq 0.$$

Bizonyítás.

$$\begin{array}{cccc}
 & \alpha & k\text{-szoros gyöke} & f\text{-nek} \\
\Longrightarrow & \alpha & (k-1)\text{-szeres gyöke} & f'\text{-nak} \\
\Longrightarrow & \alpha & (k-2)\text{-szörös gyöke} & f''\text{-nak} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Derivált és többszörös gyökök

4.39. Megjegyzés

Az előző tétel megfordítása nem igaz: f'-nak lehetnek olyan gyökei is, amelyekért nem f a „felelős”.

4.40. Következmény

Az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom α gyökének multiplicitása nem más, mint a legkisebb olyan k nemnegatív egész, amelyre $f^{(k)}(\alpha) \neq 0$, azaz α akkor és csak akkor k-szoros gyök, ha

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \ldots = f^{(k-1)}(\alpha) = 0, \quad \text{de} \quad f^{(k)}(\alpha) \neq 0.$$

Bizonyítás.

$$\begin{array}{cclc}
 & \alpha & k\text{-szoros gyöke} & f\text{-nek} \\
\Longrightarrow & \alpha & (k-1)\text{-szeres gyöke} & f'\text{-nak} \\
\Longrightarrow & \alpha & (k-2)\text{-szörös gyöke} & f''\text{-nak} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\Longrightarrow & \alpha & 1\text{-szeres gyöke} & f^{(k-1)}\text{-nak}
\end{array}$$

Derivált és többszörös gyökök

4.39. Megjegyzés

Az előző tétel megfordítása nem igaz: f'-nak lehetnek olyan gyökei is, amelyekért nem f a „felelős".

4.40. Következmény

Az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom α gyökének multiplicitása nem más, mint a legkisebb olyan k nemnegatív egész, amelyre $f^{(k)}(\alpha) \neq 0$, azaz α akkor és csak akkor k-szoros gyök, ha

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \ldots = f^{(k-1)}(\alpha) = 0, \quad \text{de} \quad f^{(k)}(\alpha) \neq 0.$$

Bizonyítás.

$$\begin{array}{cccl}
 & \alpha & k\text{-szoros gyöke} & f\text{-nek} \\
\Longrightarrow & \alpha & (k-1)\text{-szeres gyöke} & f'\text{-nak} \\
\Longrightarrow & \alpha & (k-2)\text{-szörös gyöke} & f''\text{-nak} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\Longrightarrow & \alpha & 1\text{-szeres gyöke} & f^{(k-1)}\text{-nak} \\
\Longrightarrow & \alpha & 0\text{-szoros gyöke} & f^{(k)}\text{-nak.} \quad \square
\end{array}$$

Derivált és többszörös gyökök

4.41. Következmény

Az α komplex szám akkor és csak akkor többszörös gyöke az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak, ha gyöke $\mathrm{lnko}(f, f')$-nak.

4.41. Következmény

Az α komplex szám akkor és csak akkor többszörös gyöke az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak, ha gyöke $\operatorname{lnko}(f, f')$-nak.

Bizonyítás.

α többszörös gyöke f-nek $\quad\Longleftrightarrow\quad$ α közös gyöke

Derivált és többszörös gyökök

4.41. Következmény

Az α komplex szám akkor és csak akkor többszörös gyöke az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak, ha gyöke $\mathrm{lnko}(f, f')$-nak.

Bizonyítás.

α többszörös gyöke f-nek $\iff$ α közös gyöke f-nek és f'-nak

Derivált és többszörös gyökök

4.41. Következmény

Az α komplex szám akkor és csak akkor többszörös gyöke az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak, ha gyöke $\operatorname{lnko}(f, f')$-nak.

Bizonyítás.

α többszörös gyöke f-nek $\iff$ α közös gyöke f-nek és f'-nak

$\iff$ α gyöke

Derivált és többszörös gyökök

4.41. Következmény

Az α komplex szám akkor és csak akkor többszörös gyöke az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak, ha gyöke $\operatorname{lnko}(f, f')$-nak.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} \alpha \text{ többszörös gyöke } f\text{-nek} \quad &\Longleftrightarrow \quad \alpha \text{ közös gyöke } f\text{-nek és } f'\text{-nak} \\ &\Longleftrightarrow \quad \alpha \text{ gyöke } \operatorname{lnko}(f, f')\text{-nak} \end{aligned}$$

Derivált és többszörös gyökök

4.41. Következmény

Az α komplex szám akkor és csak akkor többszörös gyöke az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak, ha gyöke $\operatorname{lnko}(f, f')$-nak.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} \alpha \text{ többszörös gyöke } f\text{-nek} &\iff \alpha \text{ közös gyöke } f\text{-nek és } f'\text{-nak} \\ &\iff \alpha \text{ gyöke } \operatorname{lnko}(f, f')\text{-nak} \end{aligned}$$

□

4.42. Következmény

Bármely legalább elsőfokú $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomra az $\frac{f}{\operatorname{lnko}(f, f')}$ polinom gyökei ugyanazok, mint f gyökei, de mindegyik egyszeres gyök.

Derivált és többszörös gyökök

4.41. Következmény

Az α komplex szám akkor és csak akkor többszörös gyöke az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak, ha gyöke $\operatorname{lnko}(f, f')$-nak.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} \alpha \text{ többszörös gyöke } f\text{-nek} &\iff \alpha \text{ közös gyöke } f\text{-nek és } f'\text{-nak} \\ &\iff \alpha \text{ gyöke } \operatorname{lnko}(f, f')\text{-nak} \end{aligned}$$ $\square$

4.42. Következmény

Bármely legalább elsőfokú $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomra az $\frac{f}{\operatorname{lnko}(f, f')}$ polinom gyökei ugyanazok, mint f gyökei, de mindegyik egyszeres gyök.

Bizonyítás.

Tfh. α egy k-szoros gyöke f-nek $(k \geq 1)$.

Derivált és többszörös gyökök

4.41. Következmény

Az α komplex szám akkor és csak akkor többszörös gyöke az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak, ha gyöke $\text{lnko}(f, f')$-nak.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} \alpha \text{ többszörös gyöke } f\text{-nek} &\iff \alpha \text{ közös gyöke } f\text{-nek és } f'\text{-nak} \\ &\iff \alpha \text{ gyöke } \text{lnko}(f, f')\text{-nak} \end{aligned}$$

$\square$

4.42. Következmény

Bármely legalább elsőfokú $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomra az $\frac{f}{\text{lnko}(f, f')}$ polinom gyökei ugyanazok, mint f gyökei, de mindegyik egyszeres gyök.

Bizonyítás.

Tfh. α egy k-szoros gyöke f-nek $(k \geq 1)$. Hányadik hatványon szerepel $(x - \alpha)$ ...?

Derivált és többszörös gyökök

4.41. Következmény

Az α komplex szám akkor és csak akkor többszörös gyöke az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak, ha gyöke $\mathrm{lnko}(f, f')$-nak.

Bizonyítás.

α többszörös gyöke f-nek $\iff$ α közös gyöke f-nek és f'-nak

$\iff$ α gyöke $\mathrm{lnko}(f, f')$-nak □

4.42. Következmény

Bármely legalább elsőfokú $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomra az $\frac{f}{\mathrm{lnko}(f,f')}$ polinom gyökei ugyanazok, mint f gyökei, de mindegyik egyszeres gyök.

Bizonyítás.

Tfh. α egy k-szoros gyöke f-nek $(k \geq 1)$. Hányadik hatványon szerepel $(x - \alpha)$ ...?

f felbontásában

Derivált és többszörös gyökök

4.41. Következmény

Az α komplex szám akkor és csak akkor többszörös gyöke az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak, ha gyöke $\operatorname{lnko}(f, f')$-nak.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} \alpha \text{ többszörös gyöke } f\text{-nek} &\iff \alpha \text{ közös gyöke } f\text{-nek és } f'\text{-nak} \\ &\iff \alpha \text{ gyöke } \operatorname{lnko}(f, f')\text{-nak} \end{aligned}$$

□

4.42. Következmény

Bármely legalább elsőfokú $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomra az $\frac{f}{\operatorname{lnko}(f, f')}$ polinom gyökei ugyanazok, mint f gyökei, de mindegyik egyszeres gyök.

Bizonyítás.

Tfh. α egy k-szoros gyöke f-nek $(k \geq 1)$. Hányadik hatványon szerepel $(x - \alpha)$ ...?

f felbontásában k-adik hatványon

Derivált és többszörös gyökök

4.41. Következmény

Az α komplex szám akkor és csak akkor többszörös gyöke az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak, ha gyöke $\mathrm{lnko}(f, f')$-nak.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} \alpha \text{ többszörös gyöke } f\text{-nek} \quad &\Longleftrightarrow \quad \alpha \text{ közös gyöke } f\text{-nek és } f'\text{-nak} \\ &\Longleftrightarrow \quad \alpha \text{ gyöke } \mathrm{lnko}(f, f')\text{-nak} \end{aligned}$$

$\square$

4.42. Következmény

Bármely legalább elsőfokú $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomra az $\frac{f}{\mathrm{lnko}(f, f')}$ polinom gyökei ugyanazok, mint f gyökei, de mindegyik egyszeres gyök.

Bizonyítás.

Tfh. α egy k-szoros gyöke f-nek $(k \geq 1)$. Hányadik hatványon szerepel $(x - \alpha)$ ...?

	f	felbontásában	k-adik hatványon
$\Longrightarrow$	f'	felbontásában	

Derivált és többszörös gyökök

4.41. Következmény

Az α komplex szám akkor és csak akkor többszörös gyöke az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak, ha gyöke $\text{lnko}(f, f')$-nak.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} \alpha \text{ többszörös gyöke } f\text{-nek} &\iff \alpha \text{ közös gyöke } f\text{-nek és } f'\text{-nak} \\ &\iff \alpha \text{ gyöke } \text{lnko}(f, f')\text{-nak} \end{aligned}$$

□

4.42. Következmény

Bármely legalább elsőfokú $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomra az $\frac{f}{\text{lnko}(f,f')}$ polinom gyökei ugyanazok, mint f gyökei, de mindegyik egyszeres gyök.

Bizonyítás.

Tfh. α egy k-szoros gyöke f-nek $(k \geq 1)$. Hányadik hatványon szerepel $(x - \alpha)$ ...?

	f	felbontásában	k-adik hatványon
$\Longrightarrow$	f'	felbontásában	$(k-1)$-edik hatványon

Derivált és többszörös gyökök

4.41. Következmény

Az α komplex szám akkor és csak akkor többszörös gyöke az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak, ha gyöke $\operatorname{lnko}(f, f')$-nak.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} \alpha \text{ többszörös gyöke } f\text{-nek} \quad &\Longleftrightarrow \quad \alpha \text{ közös gyöke } f\text{-nek és } f'\text{-nak} \\ &\Longleftrightarrow \quad \alpha \text{ gyöke } \operatorname{lnko}(f, f')\text{-nak} \end{aligned}$$

$\square$

4.42. Következmény

Bármely legalább elsőfokú $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomra az $\frac{f}{\operatorname{lnko}(f, f')}$ polinom gyökei ugyanazok, mint f gyökei, de mindegyik egyszeres gyök.

Bizonyítás.

Tfh. α egy k-szoros gyöke f-nek $(k \geq 1)$. Hányadik hatványon szerepel $(x - \alpha)$ ...?

	f	felbontásában	k-adik hatványon
$\Longrightarrow$	f'	felbontásában	$(k-1)$-edik hatványon
$\Longrightarrow$	$\operatorname{lnko}(f, f')$	felbontásában	

Derivált és többszörös gyökök

4.41. Következmény

Az α komplex szám akkor és csak akkor többszörös gyöke az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak, ha gyöke $\mathrm{lnko}(f, f')$-nak.

Bizonyítás.

$$
\begin{aligned}
\alpha \text{ többszörös gyöke } f\text{-nek} &\iff \alpha \text{ közös gyöke } f\text{-nek és } f'\text{-nak} \\
&\iff \alpha \text{ gyöke } \mathrm{lnko}(f, f')\text{-nak}
\end{aligned}
$$

□

4.42. Következmény

Bármely legalább elsőfokú $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomra az $\frac{f}{\mathrm{lnko}(f, f')}$ polinom gyökei ugyanazok, mint f gyökei, de mindegyik egyszeres gyök.

Bizonyítás.

Tfh. α egy k-szoros gyöke f-nek $(k \geq 1)$. Hányadik hatványon szerepel $(x - \alpha)$ ...?

	f	felbontásában	k-adik hatványon
$\Longrightarrow$	f'	felbontásában	$(k-1)$-edik hatványon
$\Longrightarrow$	$\mathrm{lnko}(f, f')$	felbontásában	$(k-1)$-edik hatványon

Derivált és többszörös gyökök

4.41. Következmény

Az α komplex szám akkor és csak akkor többszörös gyöke az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak, ha gyöke $\operatorname{lnko}(f, f')$-nak.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} \alpha \text{ többszörös gyöke } f\text{-nek} &\iff \alpha \text{ közös gyöke } f\text{-nek és } f'\text{-nak} \\ &\iff \alpha \text{ gyöke } \operatorname{lnko}(f, f')\text{-nak} \end{aligned}$$

□

4.42. Következmény

Bármely legalább elsőfokú $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomra az $\frac{f}{\operatorname{lnko}(f,f')}$ polinom gyökei ugyanazok, mint f gyökei, de mindegyik egyszeres gyök.

Bizonyítás.

Tfh. α egy k-szoros gyöke f-nek $(k \geq 1)$. Hányadik hatványon szerepel $(x - \alpha)$ ...?

	f	felbontásában	k-adik hatványon
$\Longrightarrow$	f'	felbontásában	$(k-1)$-edik hatványon
$\Longrightarrow$	$\operatorname{lnko}(f, f')$	felbontásában	$(k-1)$-edik hatványon
$\Longrightarrow$	$f / \operatorname{lnko}(f, f')$	felbontásában	

Derivált és többszörös gyökök

4.41. Következmény

Az α komplex szám akkor és csak akkor többszörös gyöke az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak, ha gyöke $\operatorname{lnko}(f, f')$-nak.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} \alpha \text{ többszörös gyöke } f\text{-nek} &\iff \alpha \text{ közös gyöke } f\text{-nek és } f'\text{-nak} \\ &\iff \alpha \text{ gyöke } \operatorname{lnko}(f, f')\text{-nak} \qquad \square \end{aligned}$$

4.42. Következmény

Bármely legalább elsőfokú $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomra az $\frac{f}{\operatorname{lnko}(f,f')}$ polinom gyökei ugyanazok, mint f gyökei, de mindegyik egyszeres gyök.

Bizonyítás.

Tfh. α egy k-szoros gyöke f-nek $(k \geq 1)$. Hányadik hatványon szerepel $(x - \alpha)$ ...?

$$\begin{array}{llll} & f & \text{felbontásában} & k\text{-adik hatványon} \\ \Longrightarrow & f' & \text{felbontásában} & (k-1)\text{-edik hatványon} \\ \Longrightarrow & \operatorname{lnko}(f, f') & \text{felbontásában} & (k-1)\text{-edik hatványon} \\ \Longrightarrow & f \,/\, \operatorname{lnko}(f, f') & \text{felbontásában} & \text{első hatványon.} \qquad \square \end{array}$$

Irreducibilis polinomnak nincs többszörös gyöke

4.43. Következmény

Ha T számtest, azaz részteste $\mathbb{C}$-nek, és $f \in T[x]$ irreducibilis T felett, akkor f-nek minden komplex gyöke egyszeres.

Irreducibilis polinomnak nincs többszörös gyöke

4.43. Következmény

Ha T számtest, azaz részteste $\mathbb{C}$-nek, és $f \in T[x]$ irreducibilis T felett, akkor f-nek minden komplex gyöke egyszeres.

Bizonyítás.

Mivel $\operatorname{lnko}(f, f') \in T[x]$

Irreducibilis polinomnak nincs többszörös gyöke

4.43. Következmény

Ha T számtest, azaz részteste $\mathbb{C}$-nek, és $f \in T[x]$ irreducibilis T felett, akkor f-nek minden komplex gyöke egyszeres.

Bizonyítás.

Mivel $\operatorname{lnko}(f, f') \in T[x]$ osztója f-nek és f irreducibilis, csak két lehetőség van:

Irreducibilis polinomnak nincs többszörös gyöke

4.43. Következmény

Ha T számtest, azaz részteste $\mathbb{C}$-nek, és $f \in T[x]$ irreducibilis T felett, akkor f-nek minden komplex gyöke egyszeres.

Bizonyítás.

Mivel $\mathrm{lnko}(f, f') \in T[x]$ osztója f-nek és f irreducibilis, csak két lehetőség van:

1. $\mathrm{lnko}(f, f') \sim f$:

Irreducibilis polinomnak nincs többszörös gyöke

4.43. Következmény

Ha T számtest, azaz részteste $\mathbb{C}$-nek, és $f \in T[x]$ irreducibilis T felett, akkor f-nek minden komplex gyöke egyszeres.

Bizonyítás.

Mivel $\text{lnko}(f, f') \in T[x]$ osztója f-nek és f irreducibilis, csak két lehetőség van:

1. $\text{lnko}(f, f') \sim f$: Ez nem lehet, mert

Irreducibilis polinomnak nincs többszörös gyöke

4.43. Következmény

Ha T számtest, azaz részteste $\mathbb{C}$-nek, és $f \in T[x]$ irreducibilis T felett, akkor f-nek minden komplex gyöke egyszeres.

Bizonyítás.

Mivel $\operatorname{lnko}(f, f') \in T[x]$ osztója f-nek és f irreducibilis, csak két lehetőség van:

1. $\operatorname{lnko}(f, f') \sim f$: Ez nem lehet, mert $\deg \operatorname{lnko}(f, f') \leq \deg f' < \deg f$.

Irreducibilis polinomnak nincs többszörös gyöke

4.43. Következmény

Ha T számtest, azaz részteste $\mathbb{C}$-nek, és $f \in T[x]$ irreducibilis T felett, akkor f-nek minden komplex gyöke egyszeres.

Bizonyítás.

Mivel $\operatorname{lnko}(f, f') \in T[x]$ osztója f-nek és f irreducibilis, csak két lehetőség van:

1. $\operatorname{lnko}(f, f') \sim f$: Ez nem lehet, mert $\deg \operatorname{lnko}(f, f') \leq \deg f' < \deg f$.
2. $\operatorname{lnko}(f, f') \sim 1$:

Irreducibilis polinomnak nincs többszörös gyöke

4.43. Következmény

Ha T számtest, azaz részteste $\mathbb{C}$-nek, és $f \in T[x]$ irreducibilis T felett, akkor f-nek minden komplex gyöke egyszeres.

Bizonyítás.

Mivel $\operatorname{lnko}(f, f') \in T[x]$ osztója f-nek és f irreducibilis, csak két lehetőség van:

1. $\operatorname{lnko}(f, f') \sim f$: Ez nem lehet, mert $\deg \operatorname{lnko}(f, f') \leq \deg f' < \deg f$.
2. $\operatorname{lnko}(f, f') \sim 1$: Ekkor f-nek nincs többszörös gyöke.

□