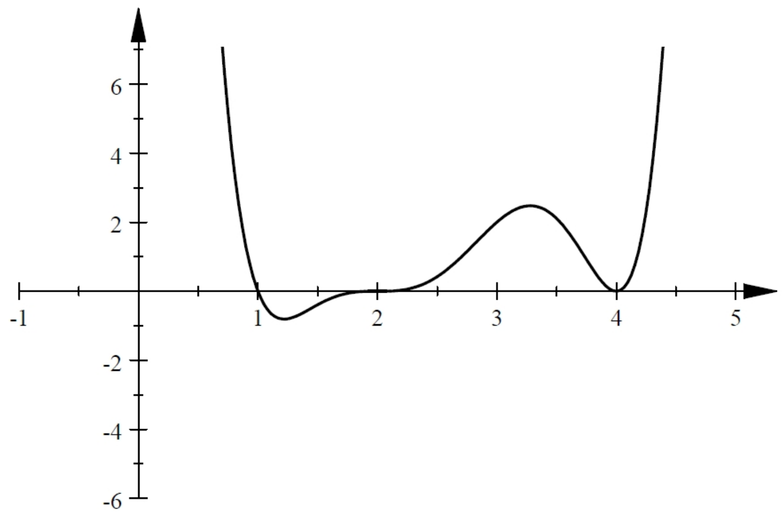
Klasszikus algebra előadás

Waldhauser Tamás
2013 április 18.

Derivált, többszörös gyökök

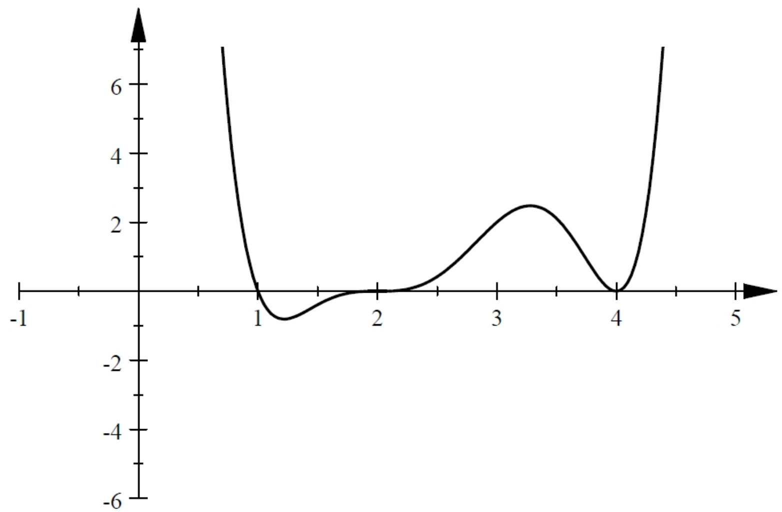
Valós polinomfüggvény deriváltja

$f = x^6 - 15x^5 + 90x^4 - 276x^3 + 456x^2 - 384x + 128$



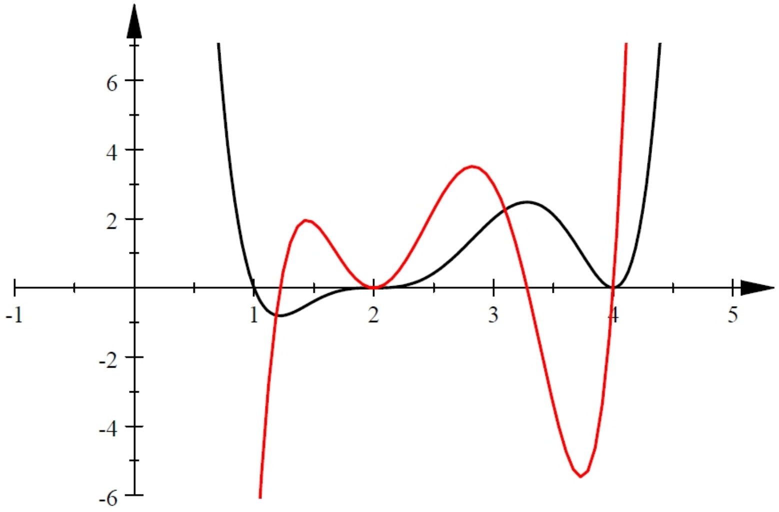
Valós polinomfüggvény deriváltja

$f = x^6 - 15x^5 + 90x^4 - 276x^3 + 456x^2 - 384x + 128 = (x-1)(x-2)^3(x-4)^2$



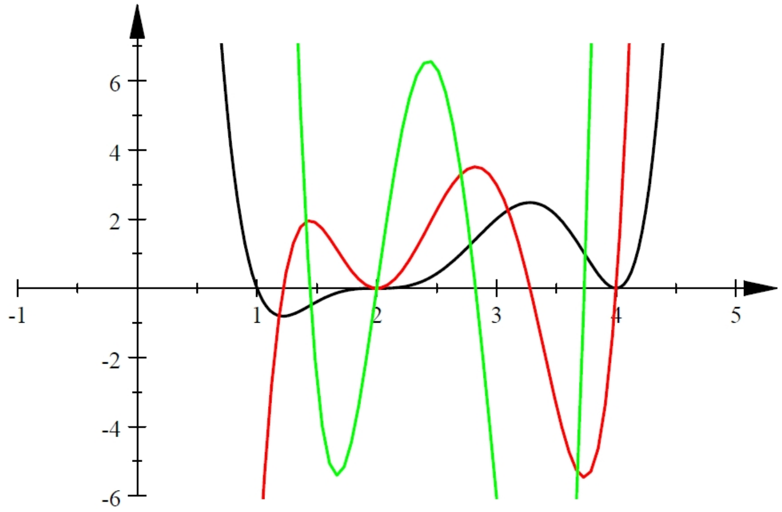
Valós polinomfüggvény deriváltja

$f = x^6 - 15x^5 + 90x^4 - 276x^3 + 456x^2 - 384x + 128 = (x-1)(x-2)^3(x-4)^2$
$f' = 6x^5 - 75x^4 + 360x^3 - 828x^2 + 912x - 384$



Valós polinomfüggvény deriváltja

$f = x^6 - 15x^5 + 90x^4 - 276x^3 + 456x^2 - 384x + 128 = (x-1)(x-2)^3(x-4)^2$
$f' = 6x^5 - 75x^4 + 360x^3 - 828x^2 + 912x - 384$
$f'' = 30x^4 - 300x^3 + 1080x^2 - 1656x + 912$



Polinom deriváltja

4.36. Definíció

Az $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in T[x]$ polinom **deriváltján** az

$$f' = n a_n x^{n-1} + \cdots + 2a_2 x + a_1 \in T[x]$$

polinomot értjük.
Az f polinom k-adik deriváltját $f^{(k)}$ jelöli.

4.37. Tétel

Minden $f, g \in T[x]$ polinomra és k pozitív egész számra érvényesek az alábbi deriválási szabályok:

(1) $(f+g)' = f' + g'$;
(2) $(fg)' = f'g + fg'$;
(3) $(f^k)' = k \cdot f^{k-1} \cdot f'$.

Bizonyítás.

A fenti definíció alapján „egyszerű” számolással ellenőrizhető (nem kell hozzá határérték!). Például, ha már (1) megvan, akkor (2)-ben elég **monomok**kal foglalkozni.

Polinom deriváltja

Bizonyítás (folyt.)

$$\begin{aligned} f &= a \cdot x^k & g &= b \cdot x^l & fg &= ab \cdot x^{k+l} \\ f' &= ka \cdot x^{k-1} & g' &= lb \cdot x^{l-1} & (fg)' &= (k+l)\, ab \cdot x^{k+l-1} \end{aligned}$$

Ezek alapján

$$\begin{aligned} f'g + fg' &= kax^{k-1} \cdot bx^l + ax^k \cdot lbx^{l-1} \\ &= kab \cdot x^{k-1+l} + lab \cdot x^{k+l-1} \\ &= (kab + lab) \cdot x^{k+l-1} \\ &= (k+l)\, ab \cdot x^{k+l-1}. \end{aligned}$$

□

Derivált és többszörös gyökök

4.38. Tétel

Ha $k \geq 1$ és az α komplex szám k-szoros gyöke az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak, akkor $k-1$-szeres gyöke f'-nak. (Ha $k=1$, akkor α nem gyöke f'-nak.)

Bizonyítás.

Ha az α gyök multiplicitása k, akkor

$$f = (x-\alpha)^k \cdot g, \text{ ahol } g(\alpha) \neq 0.$$

Deriváljunk!

$$\begin{aligned} f' &= k(x-\alpha)^{k-1} \cdot g + (x-\alpha)^k \cdot g' \\ &= (x-\alpha)^{k-1} \cdot \left(kg + (x-\alpha)\, g'\right). \end{aligned}$$

Tehát α legalább $(k-1)$-szeres gyöke f'-nak. Hogy pontosan $(k-1)$-szeres gyöke legyen, ahhoz az kell, hogy a kék polinomnak már ne legyen gyöke:

$$kg(\alpha) + (\alpha-\alpha)\, g'(\alpha) = kg(\alpha) \neq 0. \qquad \square$$

Derivált és többszörös gyökök

4.39. Megjegyzés

Az előző tétel megfordítása nem igaz: f'-nak lehetnek olyan gyökei is, amelyekért nem f a „felelős”.

4.40. Következmény

Az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom α gyökének multiplicitása nem más, mint a legkisebb olyan k nemnegatív egész, amelyre $f^{(k)}(\alpha) \neq 0$, azaz α akkor és csak akkor k-szoros gyök, ha

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \ldots = f^{(k-1)}(\alpha) = 0, \quad \text{de} \quad f^{(k)}(\alpha) \neq 0.$$

Bizonyítás.

$$\begin{array}{llll} & \alpha & k\text{-szoros gyöke} & f\text{-nek} \\ \Longrightarrow & \alpha & (k-1)\text{-szeres gyöke} & f'\text{-nak} \\ \Longrightarrow & \alpha & (k-2)\text{-szörös gyöke} & f''\text{-nak} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Longrightarrow & \alpha & 1\text{-szeres gyöke} & f^{(k-1)}\text{-nak} \\ \Longrightarrow & \alpha & 0\text{-szoros gyöke} & f^{(k)}\text{-nak.} \quad \square \end{array}$$

Derivált és többszörös gyökök

4.41. Következmény

Az α komplex szám akkor és csak akkor többszörös gyöke az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak, ha gyöke $\operatorname{Inko}(f, f')$-nak.

Bizonyítás.

$$\begin{array}{lll} \alpha \text{ többszörös gyöke } f\text{-nek} & \Longleftrightarrow & \alpha \text{ közös gyöke } f\text{-nek és } f'\text{-nak} \\ & \Longleftrightarrow & \alpha \text{ gyöke } \operatorname{Inko}(f, f')\text{-nak} \quad \square \end{array}$$

4.42. Következmény

Bármely legalább elsőfokú $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomra az $\frac{f}{\operatorname{Inko}(f,f')}$ polinom gyökei ugyanazok, mint f gyökei, de mindegyik egyszeres gyök.

Bizonyítás.

Tfh. α egy k-szoros gyöke f-nek $(k \geq 1)$. Hányadik hatványon szerepel $(x-\alpha)$ ...?

$$\begin{array}{llll} & f & \text{felbontásában} & k\text{-adik hatványon} \\ \Longrightarrow & f' & \text{felbontásában} & (k-1)\text{-edik hatványon} \\ \Longrightarrow & \operatorname{Inko}(f, f') & \text{felbontásában} & (k-1)\text{-edik hatványon} \\ \Longrightarrow & f / \operatorname{Inko}(f, f') & \text{felbontásában} & \text{első hatványon.} \quad \square \end{array}$$

Irreducibilis polinomnak nincs többszörös gyöke

4.43. Következmény

Ha T számtest, azaz részteste $\mathbb{C}$-nek, és $f \in T[x]$ irreducibilis T felett, akkor f-nek minden komplex gyöke egyszeres.

Bizonyítás.

Mivel $\operatorname{Inko}(f, f') \in T[x]$ osztója f-nek és f irreducibilis, csak két lehetőség van:

1. $\operatorname{Inko}(f, f') \sim f$: Ez nem lehet, mert $\deg \operatorname{Inko}(f, f') \leq \deg f' < \deg f$.
2. $\operatorname{Inko}(f, f') \sim 1$: Ekkor f-nek nincs többszörös gyöke.

$\square$