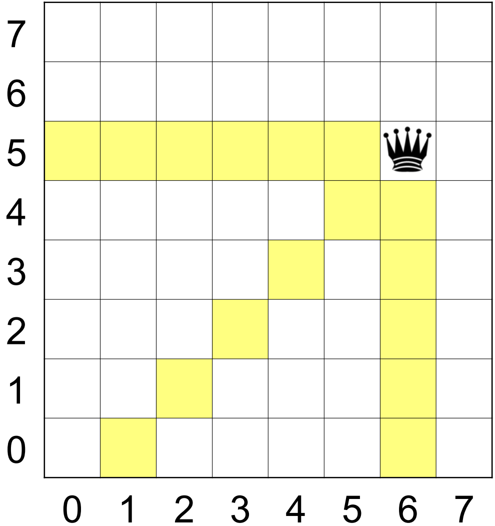
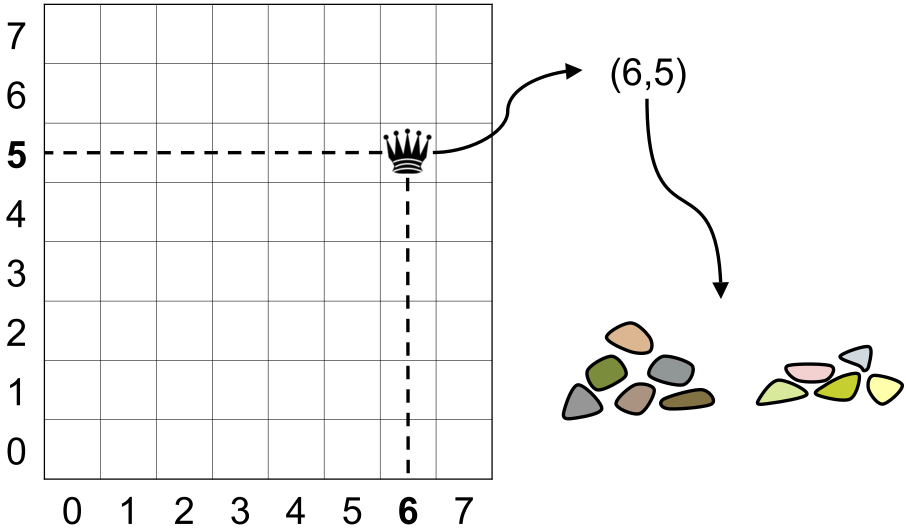
Wythoff-nim

Sarokba a királynőt!



Wythoff-nim



Wythoff-nim

Két kupac kaviccsal játszunk. Egy lépésben elvehetünk

- az egyikből bármennyit, vagy
- mindkettőből ugyanannyit.

Az nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi.

Formálisan:

- $P = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$
- $\big((p_1, p_2)\ ,\ (q_1, q_2) \big) \in L$ akkor és csak akkor, ha

  $p_1 > q_1$ és $p_2 = q_2$ vagy $p_1 = q_1$ és $p_2 > q_2$ vagy $p_1 - q_1 = p_2 - q_2$.
- $N = \{(0, 0)\}$

Nyerő stratégia? A szimmetria nem segít!

Willem Abraham Wythoff
(1865-1939)

7	7	8	6					
6	6	7	8					
5	5	3	4					
4	4	5	3					
3	3	4	5	6	2	0		
2	2	0	1	5	3	4	8	6
1	1	2	0	4	5	3	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7
	0	1	2	3	4	5	6	7

$\text{mex}\,\{2,3,4,5,6\} = 0$

7	7	8	6					
6	6	7	8					
5	5	3	4					
4	4	5	3					
3	3	4	5	6	2	0	1	
2	2	0	1	5	3	4	8	6
1	1	2	0	4	5	3	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7
	0	1	2	3	4	5	6	7

$$\text{mex}\,\{0,2,3,4,5,6,7,8\} = 1$$

7	7	8	6	9	0	1	4	5
6	6	7	8	1	9	10	3	4
5	5	3	4	0	6	8	10	1
4	4	5	3	2	7	6	9	0
3	3	4	5	6	2	0	1	9
2	2	0	1	5	3	4	8	6
1	1	2	0	4	5	3	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7
	0	1	2	3	4	5	6	7

Legyen (a_n, b_n) a Wythoff-nim n-edik jó állása.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
a_n	0	1	3	4	6	8	9	11	12	14	$\cdots$
b_n	0	2	5	7	10	13	15	18	20	23	$\cdots$

Tétel: $a_n = \text{mex}\,\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}\}$ és

$b_n = a_n + n$

A Wythoff-nim jó állásai

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
a_n	0	1	3	4	6	8	9	11	12	14	$\cdots$
b_n	0	2	5	7	10	13	15	18	20	23	$\cdots$

Példa: Mi a jó lépés a $(4, 13)$ állásból?

$4 = a_3$ párja $b_3 = 7$ $\quad (4, 13) \to (4, 7)$

$13 = b_5$ párja $a_5 = 8$ $\quad (4, 13) \not\to (8, 13)$

$13 - 4 = 9$ és $a_9 = 14$, $b_9 = 23$ $\quad (4, 13) \not\to (14, 23)$

Példa: Mi a jó lépés a $(15, 20)$ állásból?

$15 = b_6$ párja $a_6 = 9$ $\quad (15, 20) \to (15, 9)$

$20 = b_8$ párja $a_8 = 12$ $\quad (15, 20) \to (12, 20)$

$20 - 15 = 5$ és $a_5 = 8$, $b_5 = 13$ $\quad (15, 20) \to (8, 13)$

A Wythoff-nim jó állásai

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
a_n	0	1	3	4	6	8	9	11	12	14	$\cdots$
b_n	0	2	5	7	10	13	15	18	20	23	$\cdots$

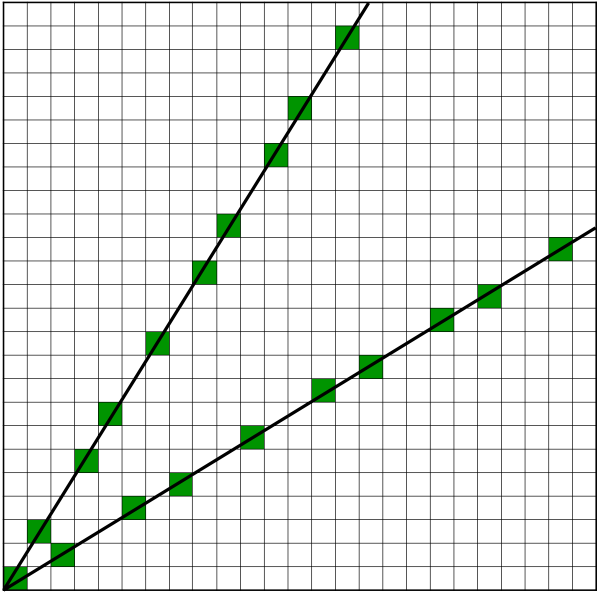
Példa: Mi a jó lépés a $(8, 11)$ állásból?

$8 = a_5$ párja $b_5 = 13$ $\quad (8, 11) \not\to (8, 13)$

$11 = a_7$ párja $b_7 = 18$ $\quad (8, 11) \not\to (18, 11)$

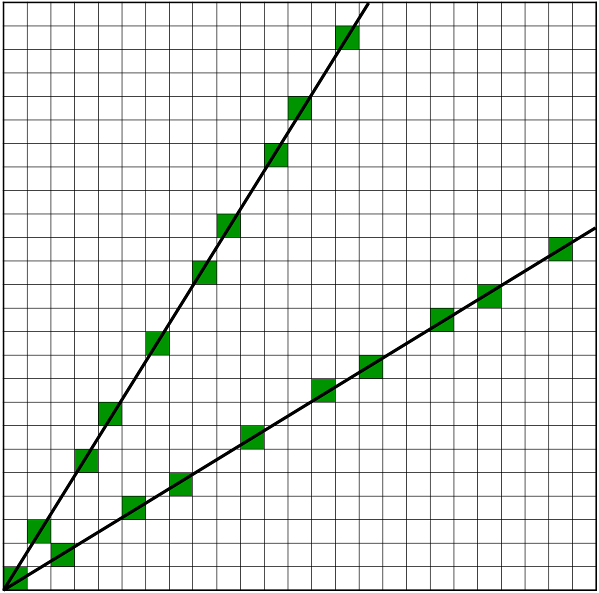
$11 - 8 = 3$ és $a_3 = 4$, $b_3 = 7$ $\quad (8, 11) \to (4, 7)$

A Wythoff-nim jó állásai



$y \approx 1,62x$

A Wythoff-nim jó állásai



$$y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}x$$

A Wythoff-nim jó állásai

n	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
a_n	0_F	1_F	100_F	101_F	1001_F	10000_F	10001_F	10100_F	$\cdots$
b_n	0_F	10_F	1000_F	1010_F	10010_F	100000_F	100010_F	101000_F	$\cdots$

Tétel (Wythoff, 1907):

- $a_n = \left[n \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right], \quad b_n = \left[n \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right]$
- Az a_n számok Fibonacci-alakja mindig páros sok nullára végződik, a b_n számoké pedig páratlan sokra, és b_n úgy kapható meg a_n-ből, hogy a Fibonacci-alak végére egy nullát írunk.

A Wythoff-nim jó állásai

Példa: Mi a jó lépés a $(11, 17)$ állásból?

$11 = 10100_F$ párja $101000_F = 18$ $\quad (11, 17) \not\to (11, 18)$

$17 = 100101_F$ párja $1001010_F = 28$ $\quad (11, 17) \not\to (28, 17)$

$17 - 11 = 6$ és $a_6 = \left[6 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] = 9$, $b_6 = 9 + 6 = 15$ $\quad (11, 17) \to (9, 15)$

Példa: Mi a jó lépés a $(12, 23)$ állásból?

$12 = 10101_F$ párja $101010_F = 20$ $\quad (12, 23) \to (12, 20)$

$23 = 1000010_F$ párja $100001_F = 14$ $\quad (12, 23) \not\to (14, 23)$

$23 - 12 = 11$ és $a_{11} = \left[11 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] = 17$, $b_{11} = 17 + 11 = 28$ $\quad (12, 23) \not\to (17, 28)$

Példa: Mi a jó lépés a $(16, 23)$ állásból?

$16 = 100100_F$ párja $1001000_F = 26$ $\quad (16, 23) \not\to (16, 26)$

$23 = 1000010_F$ párja $100001_F = 14$ $\quad (16, 23) \to (14, 23)$

$23 - 16 = 7$ és $a_7 = \left[7 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] = 11$, $b_7 = 11 + 7 = 18$ $\quad (16, 23) \to (11, 18)$

Négy tulajdonság

Tekintsük nemnegatív egész számok egy $2 \times \infty$ méretű táblázatát:

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c} \hline a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ \hline b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\ \hline \end{array} = \{(a_n, b_n) : n \in \mathbb{N}_0\}$$

(FEL) Minden nemnegatív egész szám pontosan egy oszlopban lép fel:

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \, \exists! n \in \mathbb{N}_0 : \ a_n = k \text{ vagy } b_n = k.$$

(KÜL) Az n-edik pár tagjainak különbsége éppen n:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \ b_n - a_n = n.$$

(MON) A sorok szigorú monoton növekedőek:

$$a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < \cdots \quad \text{és} \quad b_0 < b_1 < b_2 < b_3 < \cdots .$$

(MIKI) Minden oszlopban a felső szám megegyezik az összes korábbi oszlopokban szereplő számok minimális kimaradójával:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \ a_n = \operatorname{mex}\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}\}.$$

(KÜL) & (MIKI) $\Longrightarrow$ (FEL) & (MON)

Lemma:

Ha egy T táblázat rendelkezik a (KÜL) és (MIKI) tulajdonságokkal, akkor T rendelkezik a (FEL) és (MON) tulajdonságokkal is.

Biz.:

Tfh. $T \models$ (KÜL) & (MIKI). Tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén, (MIKI) szerint

$$\begin{aligned} a_n &= \operatorname{mex}\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}\} &&= \operatorname{mex} H_{n-1}, \\ a_{n+1} &= \operatorname{mex}\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n\} &&= \operatorname{mex} H_n. \end{aligned}$$

Mivel $H_n = H_{n-1} \cup \{a_n, b_n\} = H_{n-1} \cup \{\operatorname{mex} H_{n-1}, b_n\}$, világos (?), hogy $\operatorname{mex} H_n > \operatorname{mex} H_{n-1}$, vagyis $a_{n+1} > a_n$.

Az alsó sor monotonitása ezután már (KÜL) segítségével kijön:

$$b_{n+1} = a_{n+1} + n + 1 > a_n + n = b_n.$$

(KÜL) & (MIKI) $\Longrightarrow$ (FEL) & (MON) (folyt.)

Összefoglalva:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_0 & < & a_1 & < & a_2 & < & a_3 & < & \cdots \\ \rotatebox{90}{$\leq$} & & \wedge & & \wedge & & \wedge & & \\ b_0 & < & b_1 & < & b_2 & < & b_3 & < & \cdots \end{array}$$

Ebből látható, hogy ha lenne tiltott ismétlődés, az csak $b_\ell = a_n$ $(\ell < n)$ formában léphetne fel. Node

$$b_\ell \in \{a_0, \dots, a_{n-1}, b_0, \dots, b_{n-1}\} = H_{n-1} \text{ és } a_n = \operatorname{mex} H_{n-1} \implies b_\ell \neq a_n.$$

Ezzel beláttuk (FEL) unicitás részét.

Az egzisztencia részhez tfh. van olyan szám, ami nem lép fel T-ben. Legyen k a legkisebb ilyen kimaradó szám. Tehát $0, 1, \dots, k-1$ mind fellépnek, azaz

$$\exists n \in \mathbb{N}_0 : \ 0, 1, \dots, k-1 \in H_{n-1} \quad \text{és} \quad k \notin H_{n-1}.$$

Ekkor $k = \operatorname{mex} H_{n-1} = a_n$, vagyis k mégsem marad ki T-ből. $\lightning$ $\square$

(FEL) & (KÜL) & (MON) $\Longrightarrow$ $\mathcal{W}$ magja

Lemma:

Ha a T táblázat rendelkezik a (FEL), (KÜL) és (MON) tulajdonságokkal, akkor T (és tükörképe) a Wythoff-nim magja.

Biz.:

Tfh. $T \models$ (FEL) & (KÜL) & (MON); be kell látnunk, hogy $\mathcal{W}$ magja:

$$M := \{(a_n, b_n), (b_n, a_n) : n \in \mathbb{N}_0\}.$$

1. $(0,0) \in M$:
   - (FEL) miatt $\exists n : 0 \in \{a_n, b_n\}$,
   - (MON) miatt $n = 0$, és
   - (KÜL) miatt $a_0 = b_0$,

   tehát $(a_0, b_0) = (0,0) \in M$.

2. $M \xrightarrow{\forall} \overline{M}$: Tfh. $(u, v) \in M$. Hova lehet innen lépni?
   - $(u-k, v) \notin M$ (FEL) unicitás része miatt,
   - $(u, v-k) \notin M$ (FEL) unicitás része miatt,
   - $(u-k, v-k) \notin M$ (KÜL) miatt.

❸ $\overline{M} \xrightarrow{\exists} M$: Tfh. $(u, v) \notin M$. Ha $u = v$, akkor $(u, v) \to (0, 0) \in M$.
Tfh. $u \neq v$. (FEL) miatt u és v is szerepel valahol T-ben.

…	u	…	v	…
…		…?		…

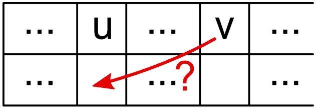
…		…		…
…	u	…	v	…

…	u	…		…
…		…	v	…

…		…	v	…
…	u	…		…

(FEL) & (KÜL) & (MON) $\Longrightarrow$ $\mathcal{W}$ magja (folyt.)

❸ $\overline{M} \xrightarrow{\exists} M$: Ezt az esetet kell még megvizsgálnunk:



Legyen $u = a_i$, $v = a_j$ és $i < j$.

- Ha $b_i < v$, akkor jó az ábrán látható lépés: $(u, v) \to (a_i, b_i)$
- Ha $b_i > v$, akkor mindkét komponenst ugyanannyival csökkentjük: $(u, v) \to (a_k, b_k)$, ahol $k := v - u = b_k - a_k$.

  Ez valóban csökkentés?

$$
\begin{aligned}
u > a_k \quad &\Longleftrightarrow \quad a_i > a_k \\
&\Longleftrightarrow \quad i > k \\
&\Longleftrightarrow \quad b_i - a_i > v - u \\
&\Longleftrightarrow \quad b_i > v \ \checkmark
\end{aligned}
$$

□

A Wythoff-nim magjának jellemzései

Tétel:

Tetszőleges T táblázatra az alábbiak ekvivalensek:

(a) $T \models$ (KÜL) & (MIKI)

(b) $T \models$ (FEL) & (KÜL) & (MON)

(c) T (és tükörképe) a Wythoff-nim magja

Biz.:

Láttuk, hogy (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c). Jelölje $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, illetve $\mathcal{C}$ mindazon T táblázatok halmazát, amelyekre (a), (b), illetve (c) teljesül. Tudjuk, hogy

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}.$$

Világos (?), hogy $|\mathcal{A}| = 1$ és $|\mathcal{C}| = 1$. Tehát $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{C}$ egyelemű halmaz, amelynek egyetlen eleme a Wythoff-nim magja (pontosabban a mag fele).

$\square$

Beatty tétele

Tétel (Beatty):

Legyenek α, β olyan pozitív irracionális számok, melyekre $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ teljesül. Ekkor az

$$[\alpha], [2\alpha], [3\alpha], \ldots \quad \text{és} \quad [\beta], [2\beta], [3\beta], \ldots$$

sorozatokban minden pozitív egész szám fellép, mégpedig pontosan egyszer.

Biz.: Lásd a könyvben, vagy ...

Két futó (A és B) fut körbe-körbe egymással szemben egy futópályán; egyiknek α percre, másiknak β percre van szüksége 1 kör lefutásához, tehát sebességeik $\frac{1}{\alpha}$ és $\frac{1}{\beta}$ (kör/perc).

A rajthelynél (ahonnan mindketten indultak) áll egy bíró. Amikor egy versenyző elfut mellette, odakiáltja neki, hogy eddig hányszor találkozott szembe a másik versenyzővel, a bíró pedig feljegyzi ezeket a számokat.

Milyen számok fognak szerepelni a bíró füzetében?

Beatty tétele (folyt.)

- Két találkozás között mindig egy versenyző halad el a bíró előtt.
- Így minden találkozás (sorszáma) pontosan egyszer lesz bejelentve.
- Tehát a bíró füzetében ez áll: $1, 2, 3, \ldots$.

Másrészt viszont:

- $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta} \notin \mathbb{Q} \implies$ sohasem fognak pont a bírónál összefutni.
- $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 \implies$ pontosan percenként találkoznak a versenyzők.
- Az n-edik kört A (ill. B) $n\alpha$ (ill. $n\beta$) perc elteltével fejezi be, és ekkor az $[n\alpha]$ (ill. $[n\beta]$) számot kiáltja oda a bírónak.
- Tehát a bíró füzetében az $[\alpha], [2\alpha], [3\alpha], \ldots, [\beta], [2\beta], [3\beta], \ldots$ számok fognak szerepelni (valamilyen sorrendben).

A fentiekből következik, hogy ... $\square$

Wythoff tétele

Tétel (Wythoff):

A Wythoff-nim magja (pontosabban annak a fele):

$$M = \left\{ \left([n\tau] , \left[n\tau^2 \right] \right) : n \in \mathbb{N}_0 \right\} , \quad \text{ahol } \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Biz.:

Legyen $a_n = [n\tau]$, $b_n = \left[n\tau^2\right]$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Elegendő belátni, hogy a

$$T = \{(a_n, b_n) : n \in \mathbb{N}_0\}$$

táblázat rendelkezik a (FEL), (KÜL), (MON) tulajdonságokkal.

A τ számról azt kell tudni, hogy ő az $x^2 = x + 1$ egyenlet pozitív megoldása.

Wythoff tétele (folyt.)

(FEL) Beatty tétele alkalmazható, mert τ irracionális, és

$$\frac{1}{\tau}+\frac{1}{\tau^2}=\frac{\tau+1}{\tau^2}=\frac{\tau^2}{\tau^2}=1.$$

Tehát az $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ számok között minden pozitív egész szám pontosan egyszer lép fel.
Mivel $a_0 = 0, b_0 = 0$, a T táblázat valóban rendelkezik a (FEL) tulajdonsággal.

(KÜL) Tetszőleges n nemnegatív egész számra

$$\begin{aligned} b_n - a_n &= \left[n\tau^2\right] - [n\tau] = [n(\tau+1)] - [n\tau] = [n\tau + n] - [n\tau] \\ &= [n\tau] + n - [n\tau] = n. \end{aligned}$$

(MON) Tetszőleges n, m nemnegatív egész számokra

$$\begin{aligned} n > m &\implies n\tau > m\tau \text{ és } n\tau^2 > m\tau^2 \\ &\implies [n\tau] \geq [m\tau] \text{ és } \left[n\tau^2\right] \geq \left[m\tau^2\right] \\ &\implies b_n \geq b_m \text{ és } a_n \geq a_m \\ &\implies b_n > b_m \text{ és } a_n > a_m. \end{aligned}$$

$\square$