Malomszerű játékok

Malomszerű játékok

- Adott egy T halmaz (tábla), és
- T részhalmazainak egy $\mathcal{M}$ családja (malmok): $\mathcal{M} \subseteq P(T)$.
- A játékosok felváltva megjelölik saját jelükkel (pl. X és O) a T halmaz egy-egy elemét.
- Aki először elfoglal egy malmot, az nyer.

Minimalom (lásd a 4.1. alfejezetet):

- T egy 3×3-as négyzetrács kilenc négyzetéből áll:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

- $\mathcal{M} = \{ \{2,9,4\}, \{7,5,3\}, \{6,1,8\}, \{2,7,6\}, \{9,5,1\}, \{4,3,8\}, \{2,5,8\}, \{4,5,6\} \}$

Stratégialopás

Tétel (stratégialopás)

Malomszerű játékban a második játékosnak nem lehet nyerő stratégiája.

Biz.

Legyen A a kezdő játékos, és B a második játékos. Tegyük fel, hogy B-nek van nyerő stratégiája. Ekkor A el tudja lopni B stratégiáját a következőképpen:

- B stratégiájában megcseréli X és O szerepét;
- a saját első lépését láthatatlannak tekinti;
- ha a lopott stratégiát követve a láthatatlan lépése által elfoglalt mezőbe kellene lépnie, akkor ezt a lépését láthatóvá teszi, és egy tetszőleges üres mezőbe lép „láthatatlanul”.

Mivel malomszerű játékban sosem árthat az, ha több helyen szerepel a saját jelünk (mint amit a lopott stratégia előírna), a fenti stratégia nyerést biztosít A számára. Mindkét játékosnak viszont nem lehet nyerő stratégiája. □

Stratégialopás

Tétel (Neumann János, 1928)

Kétszemélyes definit kombinatorikai játékban

- valamelyik játékosnak van nyerő stratégiája, vagy pedig
- mindkét játékosnak van biztonságos stratégiája.

Következmény

Malomszerű játékban

- vagy a kezdő játékosnak van nyerő stratégiája (pl. 4-amőba),
- vagy mindkét játékosnak van biztonságos stratégiája (pl. minimalom).

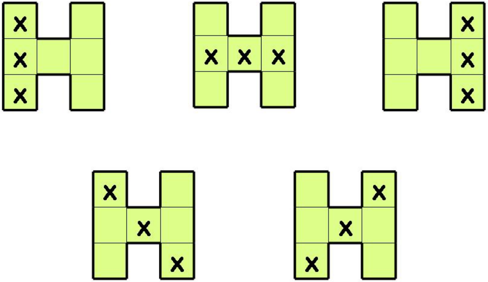
n-amőba

- T egy négyzetrács négyzeteiből áll
- n egymás melletti négyzet („vízszintesen”, „függőlegesen” vagy „átlósan”) alkot egy malmot

Kinek van nyerő stratégiája?

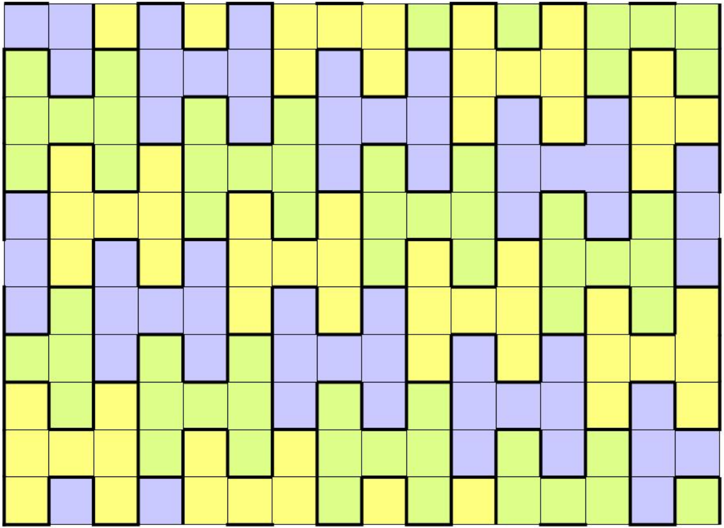
- $n \leq 4$ esetén a kezdő játékosnak van nyerő stratégiája (könnyű; lásd a 4.2. alfejezetet)
- $n = 5$ esetén a kezdő játékosnak van nyerő stratégiája 19×19-es és 15×15-ös táblán (Allis, van den Herik, Huntjens, 1993)
  Végtelen táblán még nyitott kérdés!
- $n = 6$ esetén ???
- $n = 7$ esetén ???
- $n = 8$ esetén mindkét játékosnak van biztonságos stratégiája (Zetters, 1980)
- $n \geq 9$ esetén mindkét játékosnak van biztonságos stratégiája (Shannon, Pollak, 1954)

Minimalom a H-heptominón

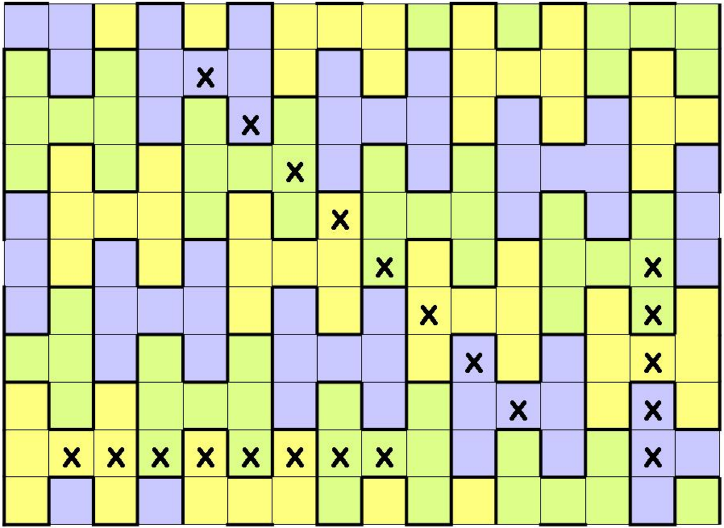


Mindkét játékosnak van biztonságos stratégiája.

9-amőba



9-amőba



Építő-Romboló változat

A malomszerű játékoknak van olyan változata is, ahol a második játékosnak a nyeréshez nem kell malmot létrehoznia, elég csak a kezdő játékos malmait kivédenie.

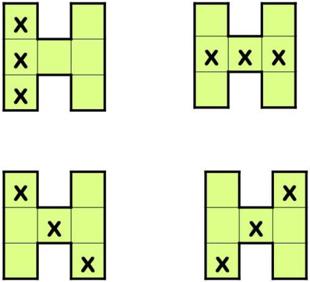
Ez az úgynevezett Építő-Romboló (Maker-Breaker) játék:

- A kezdő játékos (Építő) akkor nyer, ha elfoglal egy malmot,
- a második játékos (Romboló) pedig akkor nyer, ha a kezdő nem tud malmot építeni.

(Ezzel a terminológiával a „hagyományos" módon játszott malomszerű játékokat Építő-Építő (Maker-Maker) játékoknak nevezhetjük.)

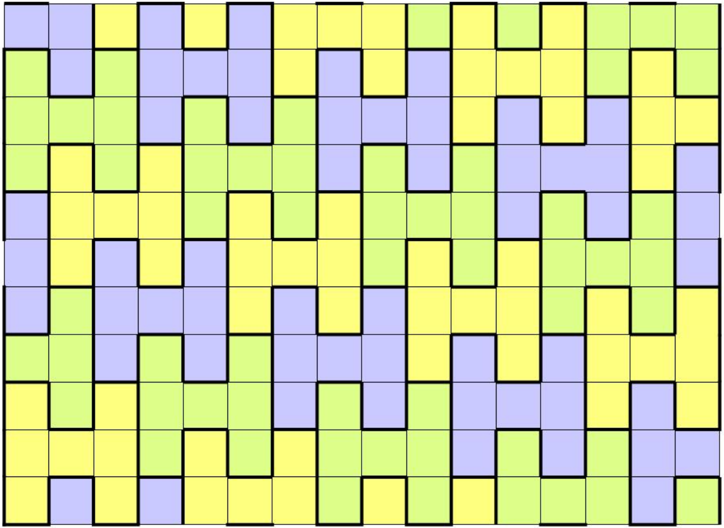
Az Építő-Romboló változat (véges táblán) éles játék, ezért valamelyik játékosnak van nyerő stratégiája.

Minimalom a H-heptominón (Építő-Romboló)

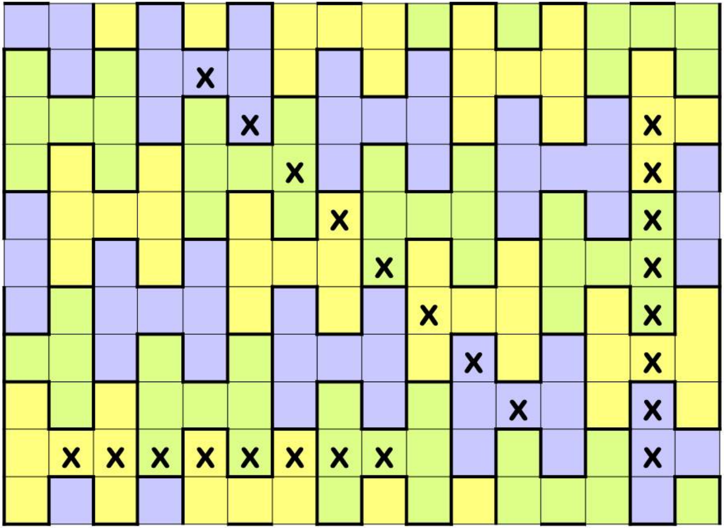


A romboló játékosnak van nyerő stratégiája.

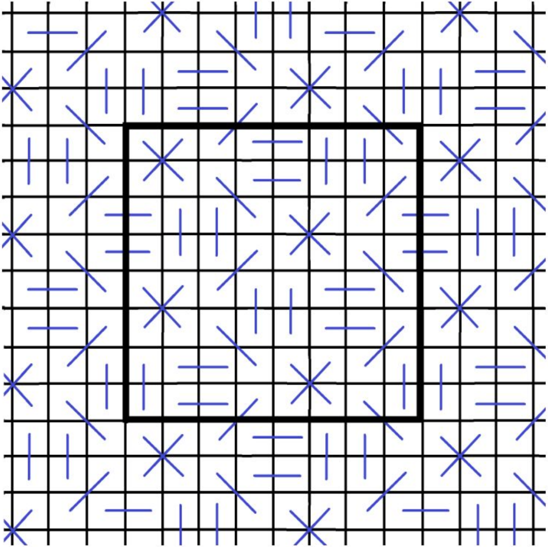
9-amőba



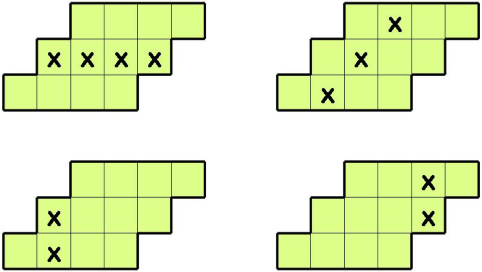
9-amőba



Hales–Jewett-párosítás a 9-amőbához

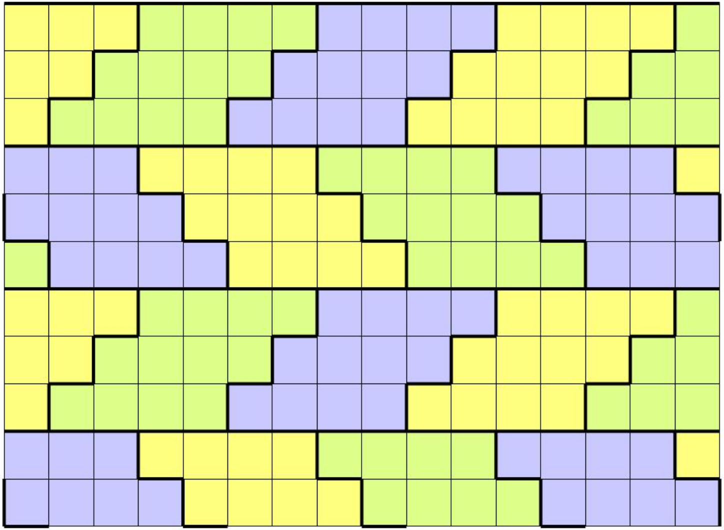


Zetters-malom (Építő-Romboló)

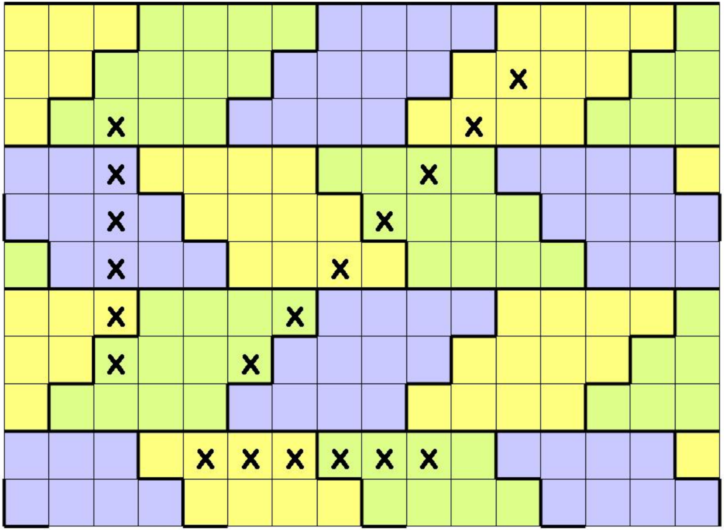


A romboló játékosnak van nyerő stratégiája.

8-amőba

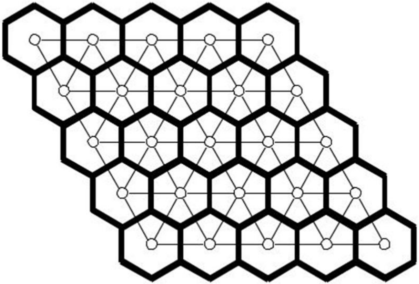


8-amőba



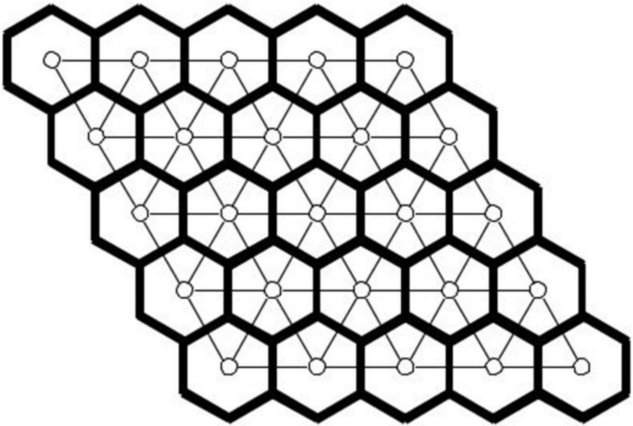
Hex

Világos (A) és sötét (B) felváltva helyezik korongjaikat a (11×11-es) hextáblára:

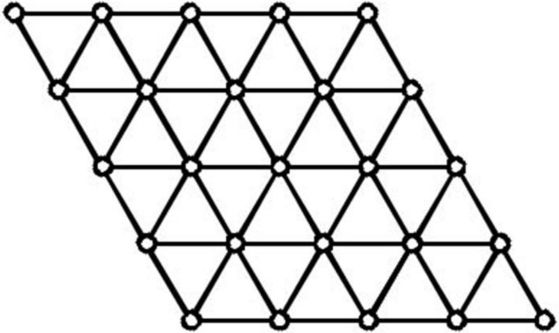


Világos célja fehér gyöngysorral összekötni a tábla alsó és felső szélét, sötét célja pedig fekete gyöngysorral összekötni a tábla bal és jobb szélét. A két játékos „malmai” nem ugyanazok, ezért a hex szigorúan véve nem malomszerű játék.

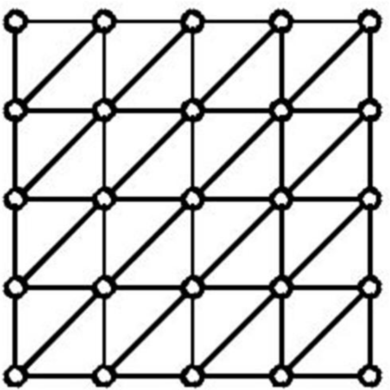
A hex gráfja



A hex gráfja



A hex gráfja



Stratégialopás a hexben

Tétel (Nash, 1949)

A hexben a második játékosnak nincs nyerő stratégiája.

Biz.

A stratégialopás itt is működik, csak a színek kicserélése (és az első lépés titkosítása) mellett tükrözni is kell. □

Tétel (Nash, 1949)

A hex éles játék (azaz döntetlen nem lehetséges).

Biz.

A következő oldalon. □

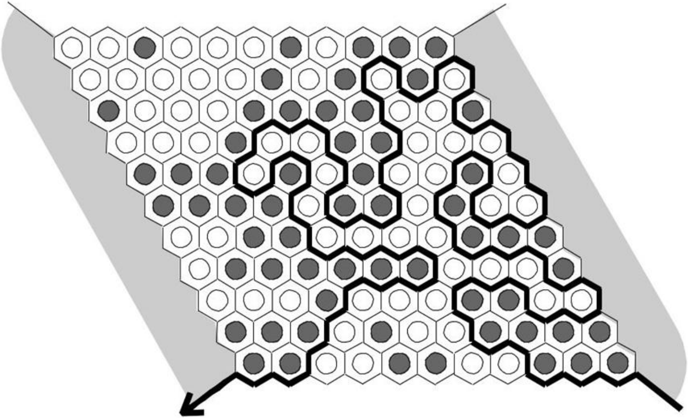
Következmény (Nash, 1949)

A hexben a kezdő játékosnak van nyerő stratégiája.

Megjegyzés

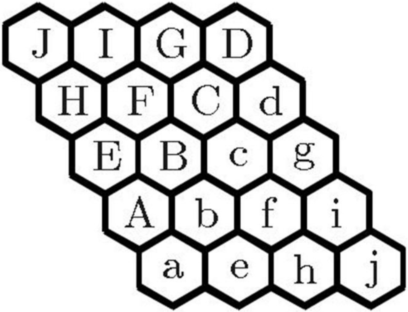
A négyzetrácson (sakktáblán) játszott „hex” nem éles, és mindkét játékosnak van biztonságos stratégiája (lásd a 4.3. alfejezetet).

A hex élességének bizonyítása



Hex aszimmetrikus táblán

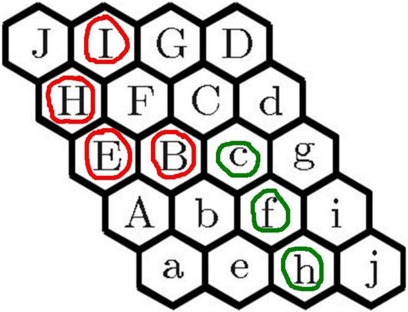
A előnyét csökkenthetjük azzal, hogy $n \times (n-1)$-es táblán játszunk:



Így viszont már B-nek van nyerő stratégiája: mindig az A által utoljára elfoglalt mező párját kell elfoglalnia (párosítási stratégia).

Hex aszimmetrikus táblán

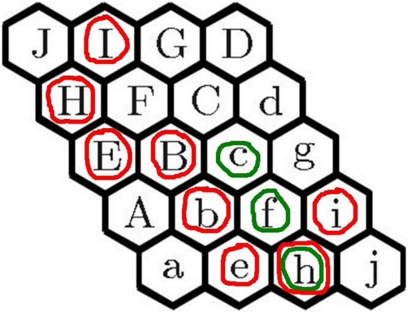
Tegyük fel, hogy A összekötötte a tábla alsó és felső szélét:



hfcBEHI

Hex aszimmetrikus táblán

Tükrözzük a gyöngysor „nagybetűs” részét:

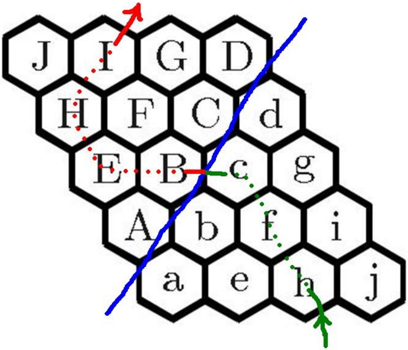


hfcbehi

A tükrözött és az eredeti gyöngysor metszi egymást, így van olyan pár, aminek mindkét tagját A foglalta el (h és H), ez pedig ellentmond a B által követett párosítási stratégiának.

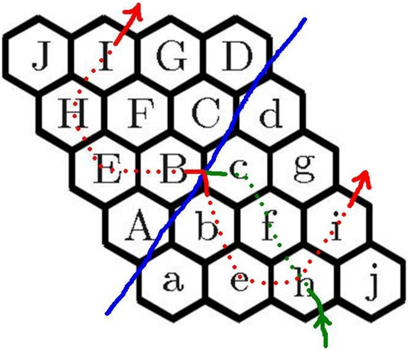
Hex aszimmetrikus táblán

Az eredeti gyöngysor a tábla alsó szélétől a felsőig halad, és jobbról balra szeli át a két térfél határát:



Hex aszimmetrikus táblán

A gyöngysor tükrözött része a határvonalnál lefelé indul, eleinte az eredeti gyöngysortól balra halad, majd végül eléri a tábla jobb szélét:



Ebből következik, hogy valóban lesz metszéspont.

Hex aszimmetrikus táblán

Összefoglalva: az $n \times m$-es táblán játszott hex játékban

- A-nak van nyerő stratégiája, ha $n \leq m$, és
- B-nek van nyerő stratégiája, ha $n > m$.

A nyerő stratégiája csak $n \leq 9$ esetén ismert az $n \times n$-es hex játékban.