

Betli játékok

Hisztizzünk!

- normál játék: $\mathcal{J} = (P, L, V)$; aki V -be lép, az nyer
- betli játék: $\mathcal{J}' = (P, L, V)$; aki V -be lép, az veszít
- hiszti-változat: $\mathcal{J}^h = (P^h, L^h, V^h)$; aki V -be lép, az nyer

$$P^h = P \dot{\cup} \{h\}$$

$$L^h = L \cup \{(v, h) \mid v \in V\} = L \cup (V \times \{h\})$$

$$V^h = \{h\}$$

A \mathcal{J}' játékot megnyerni „ugyanaz”, mint a \mathcal{J}^h játékot megnyerni.

Legyen γ^h a \mathcal{J}^h játék SG-függvénye:

$$\gamma^h(h) = 0$$

$$\forall v \in V : \gamma^h(v) = \text{mex}\{\gamma^h(h)\} = \text{mex}\{0\} = 1$$

$$\forall p \in P \setminus V : \gamma^h(p) = \text{mex}\{\gamma^h(q) \mid (p, q) \in L\}$$

Betli Wythoff-nim

5	3	4	0	6	8
4	5	3	2	7	6
3	4	5	6	2	0
2	1	0	5	3	4
0	2	1	4	5	3
1	0	2	3	4	5
0					

jó $\xrightarrow{\forall}$ rossz rossz $\xrightarrow{\exists}$ jó

$$\gamma(p) = \text{mex} \{ \gamma(q) \mid (p, q) \in L \}$$

5	3	4	0	6	8
4	5	3	2	7	6
3	4	5	6	2	0
2	1	0	5	3	4
0	2	1	4	5	3
1	0	2	3	4	5

0

5	3	4	0	6	8
4	5	3	2	7	6
3	4	5	6	2	0
2	0	1	5	3	4
1	2	0	4	5	3
0	1	2	3	4	5

5	3	4	0	6	8
4	5	3	2	7	6
3	4	5	6	2	0
2	1	0	5	3	4
0	2	1	4	5	3
1	0	2	3	4	5

0

5	3	4	0	6	8
4	5	3	2	7	6
3	4	5	6	2	0
2	0	1	5	3	4
1	2	0	4	5	3
0	1	2	3	4	5

Normál nim

Legyen $p = (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}_0^k$ a k -csomós nim egy állása.

Azt mondjuk, hogy...

- p nagy állás, ha legalább két kupacban van legalább két kavics:

$$\exists i \neq j : n_i \geq 2 \text{ és } n_j \geq 2;$$

- p átmeneti állás, ha pontosan egy kupacban van legalább két kavics:

$$\exists ! i : n_i \geq 2;$$

- p kicsi állás, ha minden kupacban legfeljebb egy kavics van:

$$\forall i : n_i \leq 1.$$

Csak ilyen lépések lehetségesek:

nagy \rightarrow nagy átmeneti \rightarrow átmeneti kicsi \rightarrow kicsi
nagy \rightarrow átmeneti átmeneti \rightarrow kicsi

Normál nim

Emlékeztető: a k -csomós normál nim SG-függvénye:

$$\gamma(n_1, \dots, n_k) = n_1 \oplus \dots \oplus n_k.$$

Egy kicsi állás akkor és csak akkor jó, ha páros sok 1-est tartalmaz.

Tétel

Az átmeneti állások mind rosszak.

1. biz.

Minden átmeneti állás így fest (sorrendtől eltekintve):

$$(0, \dots, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_\ell, n), \quad \ell \geq 0, n \geq 2.$$

A SG-függvény értéke egy ilyen álláson:

$$0 \oplus \dots \oplus 0 \oplus 1 \oplus \dots \oplus 1 \oplus n = \begin{cases} n, & \text{ha } \ell \text{ páros,} \\ 1 \oplus n, & \text{ha } \ell \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Mivel $n \geq 2$, egyik esetben sem kapunk nullát. □

Tétel

Az átmeneti állások mind rosszak.

2. biz.

Tekintsük a következő átmeneti állást:

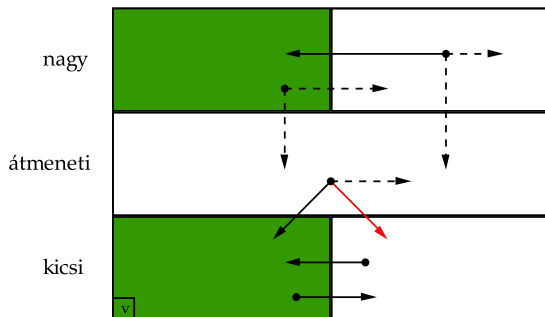
$$p := (0, \dots, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_\ell, n), \quad \ell \geq 0, n \geq 2.$$

Ebből tudunk lépni a következő két kicsi állásba:

$$q_1 := (0, \dots, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_\ell, 1), \quad q_2 := (0, \dots, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_\ell, 0).$$

A q_1 és q_2 állások közül az egyik jó állás (ha ℓ páros, akkor q_2 jó, ha ℓ páratlan, akkor q_1 jó). Tehát p -ből lehet jó állásba lépni, ezért p rossz állás. □

Normál nim



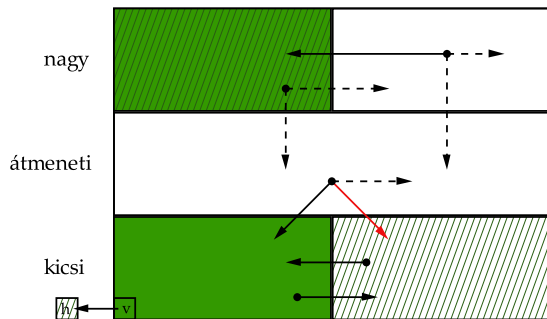
zöld: jó állás a normál nimben

$$\text{jó} \xrightarrow{\forall} \text{rossz}$$

$$\text{rossz} \xrightarrow{\exists} \text{jó}$$

$$\gamma(p) = \text{mex} \{ \gamma(q) \mid (p, q) \in L \}$$

Betli nim



zöld: jó állás a normál nimben

vonalkázott: jó állás a betli nimben

jó $\xrightarrow{\forall}$ rossz

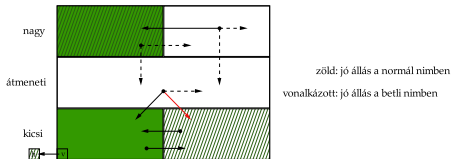
rossz $\xrightarrow{\exists}$ jó

$\gamma(p) = \text{mex} \{ \gamma(q) \mid (p, q) \in L \}$

Tétel

A hisztis nim jó állásai éppen a normál nim nagy jó állásai és kis rossz állásai (valamint a hiszti-állás).

Biz.



Következmény

A betli nim nyerő stratégiája majdnem ugyanaz, mint a normál nimé, csak a végjátékot kell módosítani: amikor átmeneti állásból kis állásba készülünk lépni, akkor páratlan sok 1-est tartalmazó kis állásba kell lépünk.



Betli kivonási játékok

$$K = \{2, 6\}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$\gamma(n)$	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
$\gamma^h(n)$	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1

$$K = \{2, 5\}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$\gamma(n)$	0	0	1	1	0	2	1	0	0	1	1	0	2	1	0	0	1	1
$\gamma^h(n)$	1	1	0	0	1	2	0	1	1	0	0	1	2	0	1	1	0	0

Betli kivonási játékok

$$K = \{1, 3, 4\}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$\gamma(n)$	0	1	0	1	2	3	2	0	1	0	1	2	3	2	0	1	0	1
$\gamma^h(n)$	1	0	1	0	2	3	2	1	0	1	0	2	3	2	1	0	1	0

$$K = \{2, 4, 7\}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$\gamma(n)$	0	0	1	1	2	2	0	3	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1
$\gamma^h(n)$	1	1	0	0	2	2	1	3	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0

Lemma (Ferguson-párok)

Legyen a $K = \{a_1, a_2, \dots\}$ kivonási halmazú ($a_1 = \min K$) kivonási játék SG-függvénye γ . Ekkor

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \gamma(n) = 0 \iff \gamma(n + a_1) = 1.$$

Biz.

Tfh. nem igaz az állítás, és legyen n a legkisebb ellenpélda. Két eset lehetséges:

❶ $\gamma(n + a_1) = 1$ de $\gamma(n) \neq 0$

$$\begin{aligned} \gamma(n) \neq 0 &\stackrel{\text{SG}}{\implies} \exists i : \gamma(n - a_i) = 0 \\ &\stackrel{n \text{ mini}}{\implies} \gamma(n - a_i + a_1) = 1 \not\leq \gamma(n + a_1) = 1 \end{aligned}$$

Lemma (Ferguson-párok)

Legyen a $K = \{a_1, a_2, \dots\}$ kivonási halmazú ($a_1 = \min K$) kivonási játék SG-függvénye γ . Ekkor

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \gamma(n) = 0 \iff \gamma(n + a_1) = 1.$$

Biz.

Tfh. nem igaz az állítás, és legyen n a legkisebb ellenpélda. Két eset lehetséges:

② $\gamma(n) = 0$ de $\gamma(n + a_1) \neq 1$

$$\gamma(n) = 0 \xrightarrow{\text{SG}} \gamma(n + a_1) \neq 0$$

$$\implies \gamma(n + a_1) \geq 2$$

$$\xrightarrow{\text{SG}} \exists i : \gamma(n + a_1 - a_i) = 1$$

$$\xrightarrow{n \text{ mini}} \gamma(n - a_i) = 0 \not\Leftarrow \gamma(n) = 0$$

□

Betli kivonási játékok

Tetszőleges $\mathcal{J} = (P, L, V)$ egyszerű játék és $p \in P$ esetén

$$\gamma(p) = \text{mex} \{ \gamma(q) \mid p \rightarrow q \} = \text{mex } H.$$

Ha $\gamma(p) = 0$, akkor (és csak akkor) $0 \notin H$, de általában ennél többet nem tudunk mondani a H halmazról.

Kivonási játékoknál, a Ferguson-pároknak köszönhetően

$$H \neq \emptyset \text{ és } \gamma(p) = 0 \implies 1 \in H.$$

Lemma

Legyen a $K = \{a_1, a_2, \dots\}$ kivonási halmazú ($a_1 = \min K$) kivonási játék SG-függvénye γ . Ekkor

$$\forall n \geq a_1 : \gamma(n) = 0 \implies \exists a_i \in K : \gamma(n - a_i) = 1.$$

Biz.

$$\begin{aligned} n \geq a_1 \text{ és } \gamma(n) = 0 &\stackrel{\text{SG}}{\implies} \gamma(n - a_1) \neq 0 \\ &\stackrel{\text{SG}}{\implies} \exists i : \gamma(n - a_1 - a_i) = 0 \\ &\stackrel{\text{Fp}}{\implies} \gamma(n - a_i) = 1 \end{aligned}$$

□

Ferguson tétele

Bármely kivonási játék hisztis és normál változatának SG-függvénye között az alábbi összefüggés áll fenn:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \gamma^h(n) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \gamma(n) = 0; \\ 0, & \text{ha } \gamma(n) = 1; \\ \gamma(n), & \text{ha } \gamma(n) \geq 2. \end{cases}$$

Biz.

Teljes indukcióval bizonyítunk. Ha $n < a_1$, akkor $\gamma(n) = 0$ és $\gamma^h(n) = 1$.

Legyen most már $n > a_1$ és tfh. $(n-1)$ -ig igaz az állítás (IH).

$$\gamma(n) = \text{mex} \{ \gamma(n - a_1), \gamma(n - a_2), \dots \} = \text{mex } H$$

$$\gamma^h(n) = \text{mex} \{ \gamma^h(n - a_1), \gamma^h(n - a_2), \dots \} = \text{mex } H^h$$

Betli kivonási játékok

Biz. (folyt.) $\gamma(n) = \text{mex } H$, $\gamma^h(n) = \text{mex } H^h$

Három esetet különböztetünk meg:

❶ $\gamma(n) \geq 2$

$$\gamma(n) \geq 2 \xrightarrow{\text{SG}} 0, 1 \in H \xrightarrow{\text{IH}} H^h = H \xrightarrow{\text{SG}} \gamma^h(n) = \gamma(n) \checkmark$$

❷ $\gamma(n) = 1$

$$\gamma(n) = 1 \xrightarrow{\text{SG}} 0 \in H, 1 \notin H \xrightarrow{\text{IH}} 1 \in H^h, 0 \notin H^h \xrightarrow{\text{SG}} \gamma^h(n) = 0 \checkmark$$

❸ $\gamma(n) = 0$

$$\gamma(n) = 0 \xrightarrow{\text{SG+FP}} 0 \notin H, 1 \in H \xrightarrow{\text{IH}} 1 \notin H^h, 0 \in H^h \Rightarrow \gamma^h(n) = 1 \checkmark$$

□

Gyakori jelenség, hogy egy játék betli változata sokkal nehezebb, mint a normál. Előfordulhat az is, hogy a normál változat triviális, a betli változat viszont érdekes (és nehéz). Ilyen például a harapás ([chomp](#)), Gale lefedős játéka, és a [taktix](#) (lásd a 3.11. és 3.12. alfejezeteket).