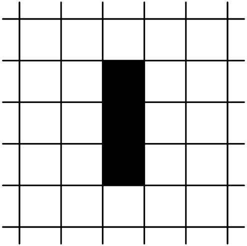
Sejtautomaták

Conway-féle életjáték

A végtelen négyzetrács minden cellájában élhet egy sejt.

- Ha egy sejtnek 2 vagy 3 élő szomszédja van, akkor a sejt életben marad, egyébként elpusztul.
- Ha egy üres cellának pontosan 3 élő szomszédja van, akkor (és csak akkor) egy új sejt születik oda.

Példa:

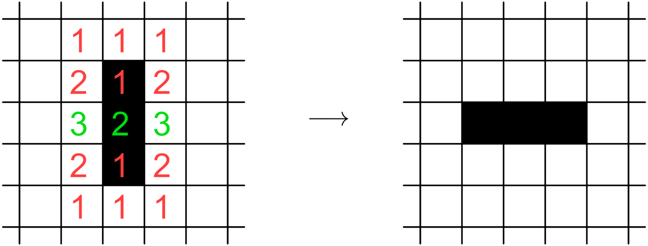


Conway-féle életjáték

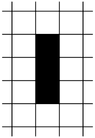
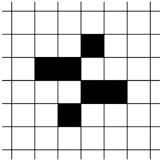
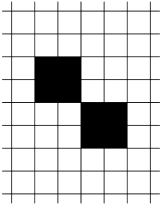
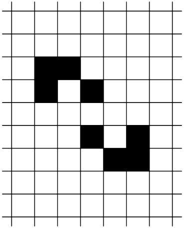
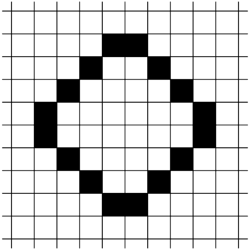
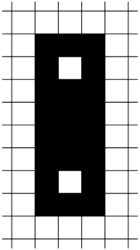
A végtelen négyzetrács minden cellájában élhet egy sejt.

- Ha egy sejtnek 2 vagy 3 élő szomszédja van, akkor a sejt életben marad, egyébként elpusztul.
- Ha egy üres cellának pontosan 3 élő szomszédja van, akkor (és csak akkor) egy új sejt születik oda.

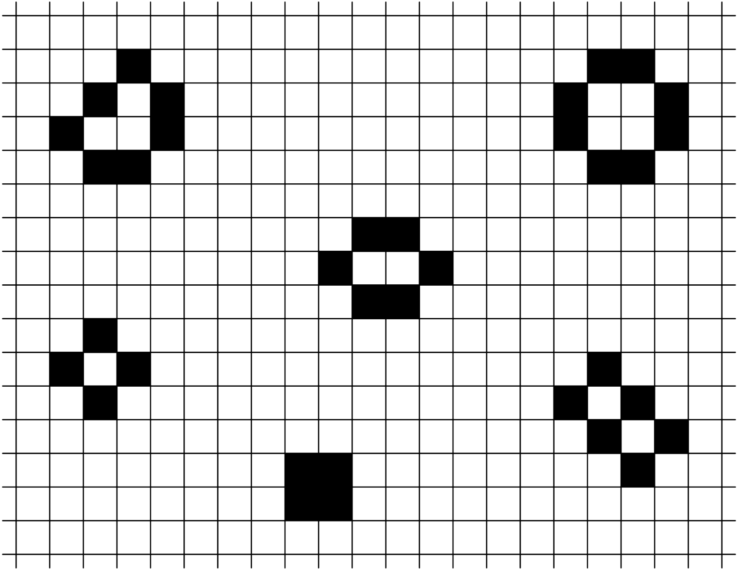
Példa:



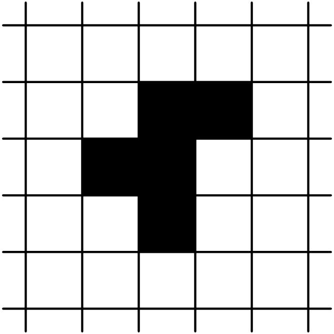
Oszcillátorok

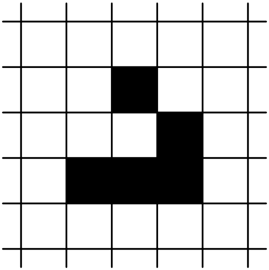
Csendéletek

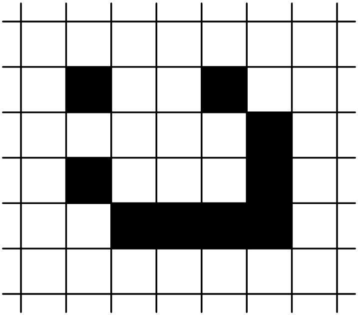


r-pentominó

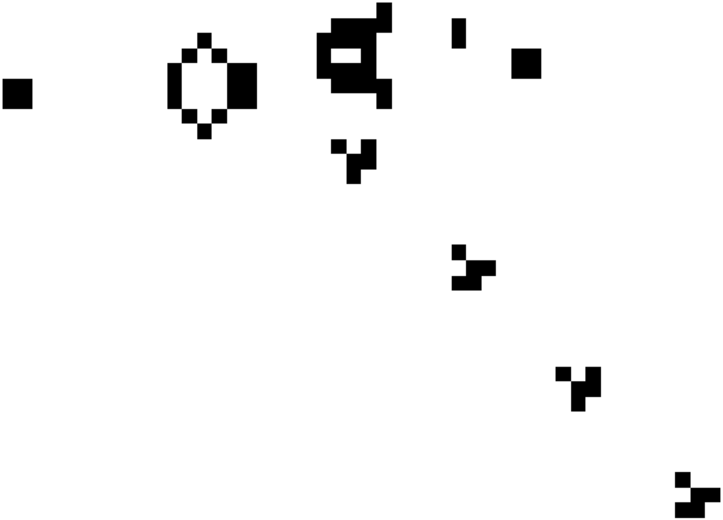


Sikló és űrhajó

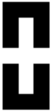


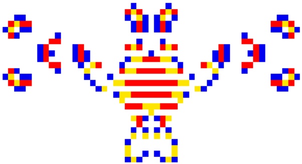


Siklókilövő



Egyéb érdekes konfigurációk



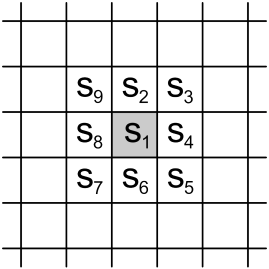


Sejtautomaták

Legyen S a cellák lehetséges állapotainak (véges) halmaza.
(Például az életjáték esetén $S = \{0, 1\}$.)

Egy cella állapota a következő lépésben saját maga és szomszédai jelenlegi állapotától függ. Ezt egy kilencváltozós $f : S^9 \to S$ átmenetfüggvény írja le. (Ez adja a sejtautomata „játékszabályát”.)

A szürke cella állapota a következő lépésben $f(s_1, s_2, \ldots, s_9)$ lesz:



Feltesszük, hogy van olyan $c \in S$ állapot, amelyre $f(c, c, \ldots, c) = c$ teljesül (élettelen vagy nyugalmi állapot).

Sejtautomaták

A sejtautomata „világának” pillanatnyi állapotát konfigurációnak nevezzük. Egy K konfigurációt egy S feletti végtelen méretű $(k_{ij})_{i,j=-\infty}^{\infty}$ mátrixszal adhatjuk meg.

Azt mondjuk, hogy a $K = (k_{ij})_{i,j=-\infty}^{\infty}$ konfiguráció véges, ha majdnem minden cella élettelen, azaz véges sok (i, j) pártól eltekintve $k_{ij} = c$. Jelölje $\mathcal{K}$ az összes véges konfigurációk halmazát.

A lokális átmenetfüggvény segítségével minden véges konfigurációhoz meghatározhatjuk az „utódját”. Így kapjuk a $g : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ globális átmenetfüggvényt. (Miért lesz véges konfiguráció utódja is véges?)

A sejtautomata személytelen játék:

- $P = \mathcal{K}$,
- $L = \{(K, g(K)) : K \in \mathcal{K}\}$.

Édenkertek

Ha egy K konfiguráció benne van a g függvény értékkészletében (azaz $\exists K_0 \in \mathcal{K} : g(K_0) = K$), akkor azt mondjuk, hogy K képkonfiguráció.

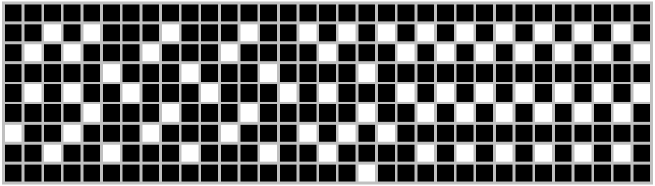
Ha K olyan konfiguráció, amely nemcsak, hogy nem képkonfiguráció, de nem is jelenhet meg képkonfiguráció részeként, akkor K-t édenkertnek nevezzük.

Édenkert-tétel (Moore 1962, Myhill 1963): Egy sejtautomatában akkor és csak akkor létezik édenkert, ha globális átmenetfüggvénye nem injektív.

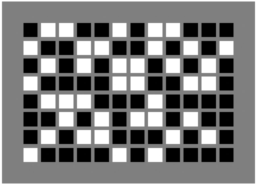
Következmény: A Conway-féle életjátékban létezik édenkert.

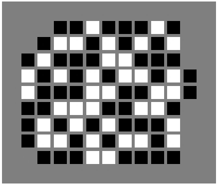
Édenkertek az életjátékban

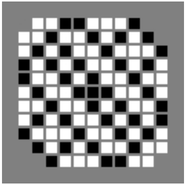
Az első édenkert (Banks, 1971):



Kis édenkertek:





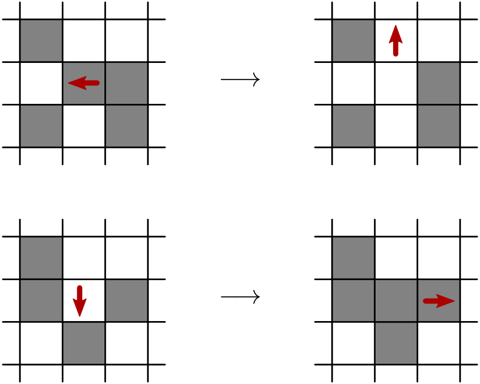


Langton hangyája

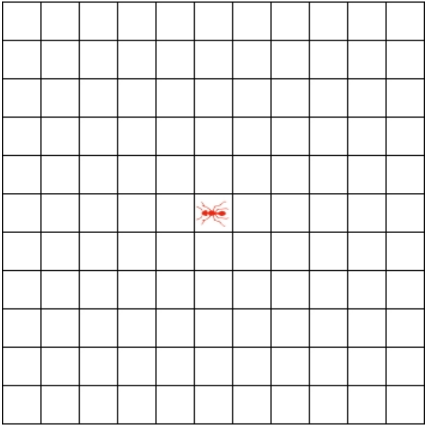
A végtelen négyzetrács néhány cellájában van egy-egy morzsa, ezek között bolyong egy hangya.

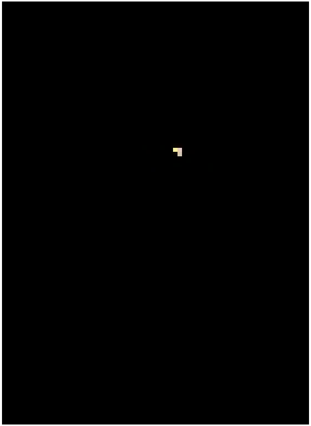
- Ha a hangya morzsát talál, akkor megeszi és jobbra fordul.
- Ha üres cellába érkezik, akkor tesz oda egy morzsát, és balra fordul.

Példák:



Langton hangyája



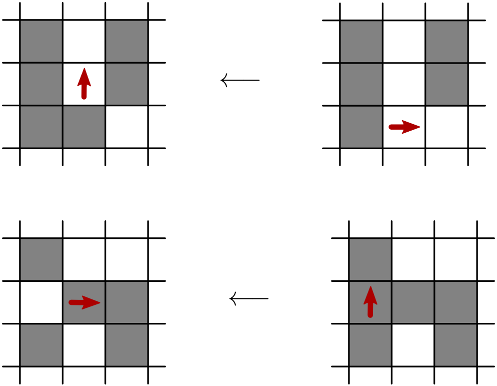


A hangya, mint sejtautomata

A hangya-játék is sejtautomata; állapotainak száma tíz.

A globális átmenetfüggvény bijektív: minden (egyhangyás) konfiguráció képkonfiguráció, és „őse” egyértelműen meghatározható. (Következésképp nem létezik hangya-édenkert.)

Bizonyító erejű példák:



A hangya nem korlátos

Tétel: A hangya a kiindulópontjától bármilyen nagy távolságra eljut.

Biz.: A K_0 konfigurációból indulva így fest a játszma:

$$K_0, K_1, K_2, \ldots, \qquad \text{ahol } K_{n+1} = g\left(K_n\right) \text{ minden } n\text{-re.}$$

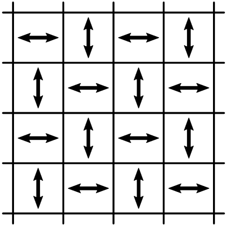
Tegyük fel, hogy a hangya végig egy korlátos tartományban marad. Ekkor a hangya bolyongása során csak ebben a tartományban változhat a cellák állapota, tehát véges sok különböző konfiguráció fog fellépni. Így a fenti sorozatban lesz ismétlődés, és a g függvény injektivitása miatt az elsőként ismétlődő konfiguráció csak K_0 lehet. Tehát a konfigurációk periodikusan ismétlődnek:

$$K_0, K_1, \ldots, K_n,\ K_0, K_1, \ldots, K_n,\ K_0, \ldots,$$

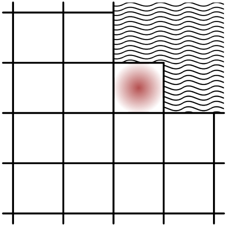
ezért minden konfiguráció végtelen sokszor lép fel. Ebből következik, hogy ha a hangya elér egy cellába, akkor később újra visszatér oda (végtelen sokszor).

A hangya nem korlátos (folyt.)

A hangya minden lépésnél 90°-ot fordul, ezért egy cellába vagy mindig „vízszintesen”, vagy mindig „függőlegesen” érkezik:



Tekintsük a hangya által meglátogatott legészakibb cellák közül a legkeletibbet:

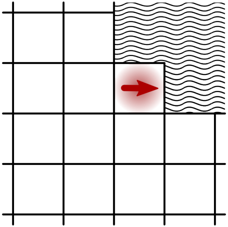


A hangya nem korlátos (folyt.)

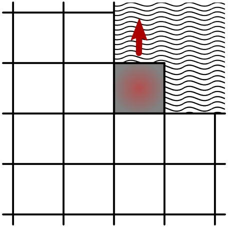
ÁMNTFH. ez a legészakkeletibb meglátogatott cella „vízszintes”.

A hangya mindig nyugatról érkezik ide és minden alkalommal megváltozik a cella állapota (morzsás $\leftrightarrow$ üres).

Ezért mindenképp előfordul olyan eset, hogy a hangya üresen találja ezt a cellát (legkésőbb a második látogatásakor).



Mivel nyugatról érkezett és balra fordul, északra fog továbbhaladni.



Ez azonban ellentmond annak a feltevésünknek, hogy ettől a cellától északra sohasem jut el a hangya. $\square$