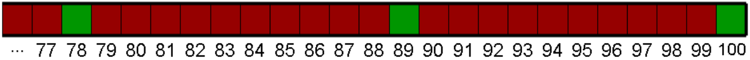
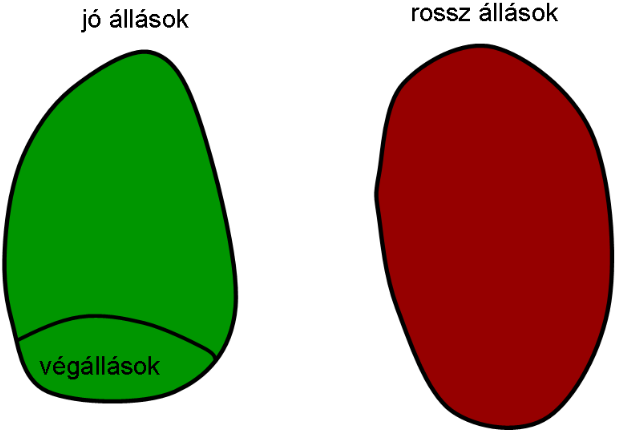
Egyszerű játék magja, Sprague–Grundy-függvénye

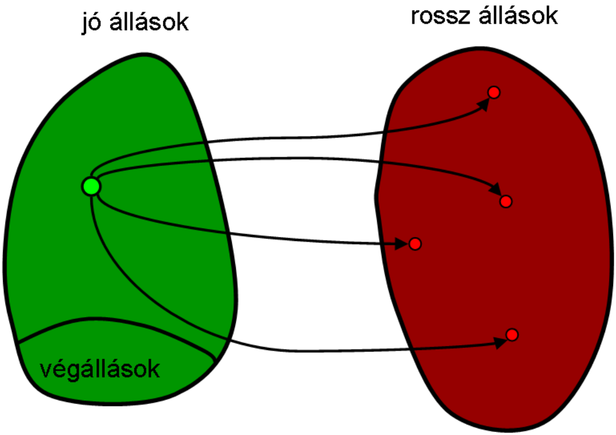
Bachet játéka



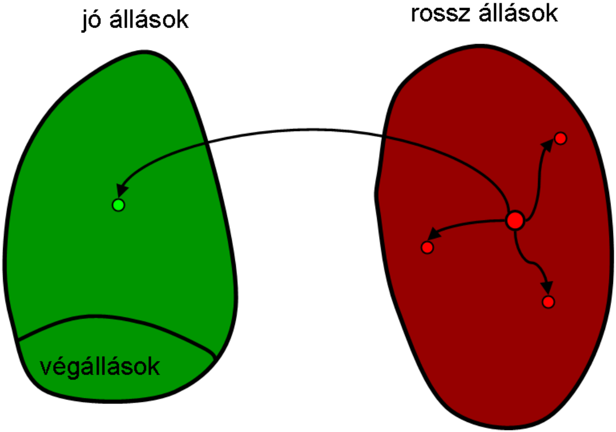
Jó és rossz állások



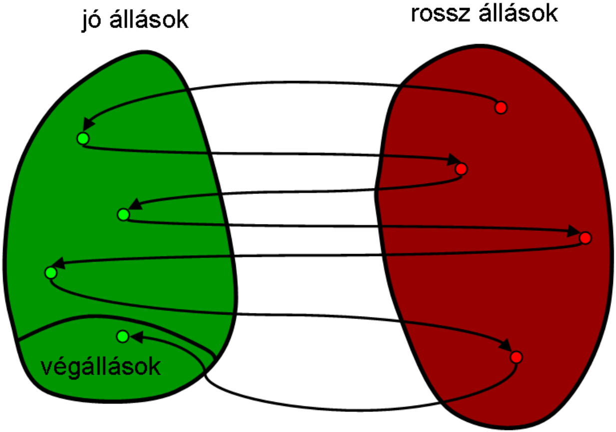
Jó állásból csak rossz állásba lehet lépni



Rossz állásból mindig lehet jó állásba lépni



A játszma menete



Egyszerű játék magja

Legyen $\mathcal{J} = (P, L, N)$ egyszerű játék.

Az $M \subseteq P$ halmazt a $\mathcal{J}$ játék magjának nevezzük, ha

- $N \subseteq M$;
- $\forall p \in M \;\; \forall q \in P\colon \; (p, q) \in L \implies q \in \overline{M}$;
- $\forall p \in \overline{M} \;\; \exists q \in M\colon \; (p, q) \in L$.

A nyerő stratégia: „Lépj mindig M-be!”

Ha $p_0 \notin M$, akkor A-nak, ha $p_0 \in M$, akkor B-nek van nyerő stratégiája.

$\implies$ A mag egyértelműen meghatározott (ha létezik egyáltalán).

A Sprague–Grundy-függvény

Legyen $H \subseteq \mathbb{N}_0$, például $H = \{0, 1, 2, 4, 6\}$.

- $\max H = 6$ (**max**imal)
- $\min H = 0$ (**min**imal)
- $\operatorname{mex} H = \min \overline{H} = 3$ (**m**inimal **ex**cluded)

A $\gamma \colon P \to \mathbb{N}_0$ függvényt a $\mathcal{J}$ játék Sprague–Grundy-függvényének nevezzük, ha

$$\forall p \in P \colon \gamma(p) = \operatorname{mex} \{\gamma(q) \mid (p, q) \in L\} .$$

Sprague és Grundy tétele

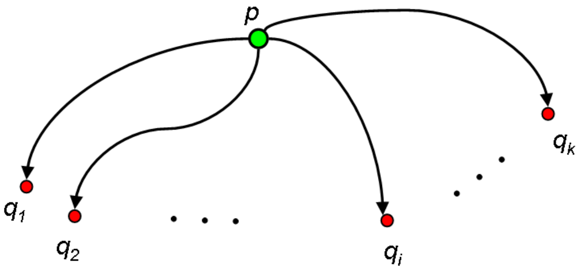
Tétel (Sprague 1935, Grundy 1939)

Tetszőleges $\mathcal{J}$ egyszerű játékhoz

1. létezik SG-függvény;
2. a SG-függvény egyértelmű;
3. a mag éppen a SG-függvény zérushelyeinek halmaza:

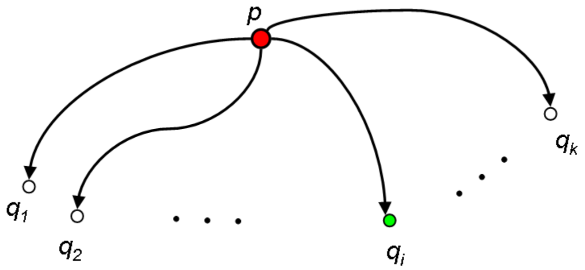
$$M = \{p \in P \mid \gamma(p) = 0\}.$$

3. Jó állásból csak rossz állásba lehet lépni



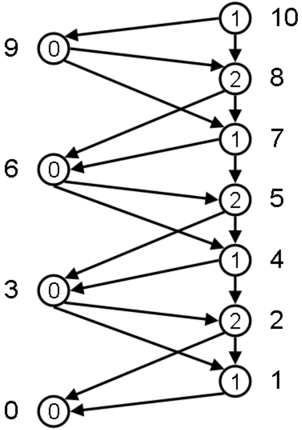
$$\gamma(p) = \operatorname{mex}\{\gamma(q_1), \gamma(q_2), \ldots, \gamma(q_k)\} = 0 \implies \forall i\colon \gamma(q_i) \neq 0$$

3. Rossz állásból mindig lehet jó állásba lépni



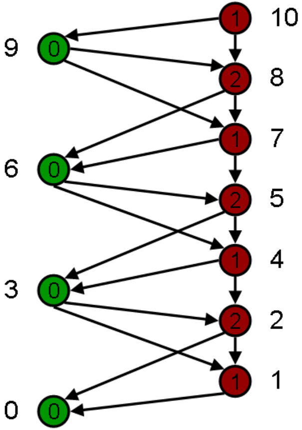
$$\gamma(p) = \text{mex}\{\gamma(q_1), \gamma(q_2), \ldots, \gamma(q_k)\} \neq 0 \implies \exists i \colon \gamma(q_i) = 0$$

Mini Bachet-játék



$\gamma(n) = n \bmod 3$

Mini Bachet-játék



n jó állás $\Leftrightarrow 3 \mid n$

1. A SG-függvény létezésének bizonyítása

Legyen $\mathcal{J} = (P, L, N)$ egyszerű játék.

Rekurzívan definiáljuk $\gamma(p)$ értékét:

- Ha $o(p) = 0$ (azaz p végállás), akkor legyen $\gamma(p) = 0$.
- Ha az n-nél kisebb rendű állásokon már definiált a γ függvény, és $o(p) = n$, akkor legyen $\gamma(p) = \operatorname{mex}\{\gamma(q) \mid (p, q) \in L\}$.
  (Az itt fellépő q állásokra $o(q) < n$, így $\gamma(q)$ már definiálva van.)

Mivel minden állás rendje véges, γ értékét az összes állásra definiáltuk.

Világos, hogy ez a γ függvény eleget tesz a SG-függvény definíciójának.

(Ha p végállás, akkor $\gamma(p) = 0 = \operatorname{mex}\emptyset = \operatorname{mex}\{\gamma(q) \mid (p, q) \in L\}$.)

2. A SG-függvény egyértelműségének bizonyítása

Legyen $\mathcal{J} = (P, L, N)$ egyszerű játék.

Tfh. γ_1 és γ_2 is SG-függvénye $\mathcal{J}$ -nek.

Rend szerinti indukcióval bizonyítjuk, hogy $\gamma_1(p) = \gamma_2(p)$ minden p állásra:

- Ha $o(p) = 0$ (azaz p végállás), akkor $\gamma_1(p) = \operatorname{mex} \emptyset = \gamma_2(p)$.
- Tfh. $\forall q \in P: \; o(q) < n \implies \gamma_1(q) = \gamma_2(q)$. (IH)
  Legyen $o(p) = n$, ekkor

  $$\gamma_1(p) \overset{\text{SG}}{=} \operatorname{mex}\{\gamma_1(q) \mid (p, q) \in L\} \overset{\text{IH}}{=} \operatorname{mex}\{\gamma_2(q) \mid (p, q) \in L\} \overset{\text{SG}}{=} \gamma_2(p).$$

  (A fenti q állásokra $o(q) < n$, így $\gamma_1(q) = \gamma_2(q)$ az IH szerint.)

$\square$

Bachet-játék

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	0	1	2
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	⋯

$$\gamma(n) = n \bmod 11$$

Bachet-játék

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	0	1	2
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	⋯

n jó állás $\Leftrightarrow 11 \mid n$

Sarokba a bástyát!

7	7	6	5	4	3	2	1	0
6	6	7	4	5	2	3	0	1
5	5	4	7	6	1	0	3	2
4	4	5	6	7	0	1	2	3
3	3	2	1	0	7	6	5	4
2	2	3	0	1	6	7	4	5
1	1	0	3	2	5	4	7	6
0	0	1	2	3	4	5	6	7
	0	1	2	3	4	5	6	7

Sarokba a sánta bástyát!

KöMaL 1993/12

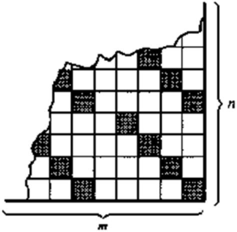
Matematika gyakorlatok megoldása

Gy. 2881. *A 8 × 8-as sakktábla bal fölső sarkában egy bábu áll, amely vízszintesen jobbra léphet legfeljebb 4 mezőt, vagy függőlegesen lefelé legfeljebb 3 mezőt. András és Balázs felváltva lépnek a bábuval. Kinek van nyerő stratégiája, ha*

a) *az nyer,*

b) *az veszít,*

aki a tábla jobb alsó mezőjére lép? (H)



Megoldás. A feladatot 8×8-as tábla helyett $n \times m$-esre oldjuk meg. Kezdjük az *a)* résszel. Az *1. ábra* a tábla jobb alsó részét mutatja. Az itt látható 4×5-ös részt kiszínezzük az ábra szerint, és az egész táblát befedjük ebből a sarokból indulva ilyen téglalapokkal; majd a kilógó részeket „levágjuk". Ezáltal a tábla minden mezője fehér vagy fekete színű lett.

Belátjuk, hogy ha valaki a bábuval fekete mezőre lép, akkor utána már mindig tud győzni. Fekete mezőről csak fehérre lehet lépni, hiszen mind vízszintesen, mind függőlegesen pontosan eggyel vannak távolabb a fekete me-