Játékok különféle kompozíciói

Sprague–Grundy-függvény

Létezik egy egyértelműen meghatározott $\gamma \colon P \to \mathbb{N}_0$ függvény, amelyre minden $p \in P$ esetén

$$\gamma(p) = \operatorname{mex}\left\{\gamma(q) \mid p \to q\right\}.$$

A mag a zérushelyek halmaza:

$$p \text{ jó állás} \iff \gamma(p) = 0.$$

Kalmár–Steinhaus-függvény

Létezik egy egyértelműen meghatározott $\varkappa\colon P \to \mathbb{N}_0$ függvény, amelyre minden $p \in P$ esetén

- ha a $\{\varkappa(q) \mid p \to q\}$ halmazban van páros szám, akkor

$$\varkappa(p) = 1 + \min\left(\{\varkappa(q) \mid p \to q\} \cap 2\mathbb{N}_0\right), \qquad \textbf{(l}\text{east } \textbf{e}\text{ven)}$$

- ha a $\{\varkappa(q) \mid p \to q\}$ halmaz minden eleme páratlan, akkor

$$\varkappa(p) = 1 + \max\{\varkappa(q) \mid p \to q\}. \qquad \textbf{(g}\text{reatest } \textbf{o}\text{dd)}$$

Röviden:

$$\varkappa(p) = 1 + \mathrm{lego}\{\varkappa(q) \mid p \to q\}.$$

A magot a páros értékek adják:

$$p \text{ jó állás} \iff \varkappa(p) \text{ páros.}$$

Játsszunk több játékot egyszerre!

- $\mathcal{J}_1 + \cdots + \mathcal{J}_n$ (összeg, diszjunktív kompozíció): pontosan egyben lépünk

$$\gamma_{\mathcal{J}_1 + \cdots + \mathcal{J}_n}(p_1, \ldots, p_n) = \gamma_{\mathcal{J}_1}(p_1) \oplus \cdots \oplus \gamma_{\mathcal{J}_n}(p_n)$$

- $\mathcal{J}_1 \wedge \cdots \wedge \mathcal{J}_n$ (szorzat, konjunktív kompozíció): mindegyikben lépünk

$$\varkappa_{\mathcal{J}_1 \wedge \cdots \wedge \mathcal{J}_n}(p_1, \ldots, p_n) = \varkappa_{\mathcal{J}_1}(p_1) \wedge \cdots \wedge \varkappa_{\mathcal{J}_n}(p_n)$$

- $\mathcal{J}_1 \vee \cdots \vee \mathcal{J}_n$ (szelektív kompozíció): néhányban lépünk (tetszés szerint)

$$\varkappa_{\mathcal{J}_1 \vee \cdots \vee \mathcal{J}_n}(p_1, \ldots, p_n) = \varkappa_{\mathcal{J}_1}(p_1) \boxplus \cdots \boxplus \varkappa_{\mathcal{J}_n}(p_n)$$

A ⊞ művelet

⊞	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	3	3	5	5	7	7
2	2	3	4	5	6	7	8	9
3	3	3	5	5	7	7	9	9
4	4	5	6	7	8	9	10	11
5	5	5	7	7	9	9	11	11
6	6	7	8	9	10	11	12	13
7	7	7	9	9	11	11	13	13

$a \boxplus b =$

- $a + b$, ha a vagy b páros
- $a + b - 1$, ha a és b is páratlan

Grundy nim, diszjunktív változat

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\gamma(n)$	0	0	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	3	2	1	3	2	4

$$\begin{aligned}\gamma(10) &= \operatorname{mex}\left(\gamma(1)\oplus\gamma(9), \gamma(2)\oplus\gamma(8), \gamma(3)\oplus\gamma(7), \gamma(4)\oplus\gamma(6)\right)\\ &= \operatorname{mex}\left(0\oplus 1, 0\oplus 2, 1\oplus 0, 0\oplus 1\right)\\ &= \operatorname{mex}\left(1, 2, 1, 1\right) = 0\end{aligned}$$

$$n \text{ jó állás} \iff \text{???}$$

Grundy nim, konjunktív változat

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\varkappa(n)$	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

$$\begin{aligned}\varkappa(10) &= 1 + \text{lego}\left(\varkappa(1) \wedge \varkappa(9)\,, \varkappa(2) \wedge \varkappa(8)\,, \varkappa(3) \wedge \varkappa(7)\,, \varkappa(4) \wedge \varkappa(6)\right)\\ &= 1 + \text{lego}\left(0 \wedge 1, 0 \wedge 1, 1 \wedge 1, 1 \wedge 1\right)\\ &= 1 + \text{lego}\left(0, 0, 1, 1\right) = 1 + 0 = 1\end{aligned}$$

$$n \text{ jó állás} \quad \Longleftrightarrow \quad n = 1, 2$$

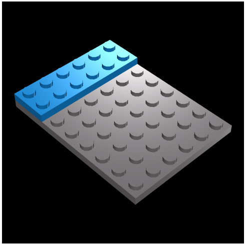
Grundy nim, szelektív változat

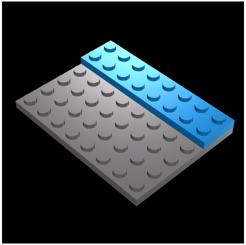
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\varkappa(n)$	0	0	1	2	3	3	4	5	5	6	7	7	8	9	9	10	11	11

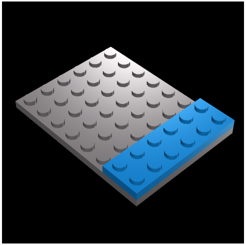
$$\begin{aligned}\varkappa(10) &= 1 + \operatorname{lego}\left(\varkappa(1) \boxplus \varkappa(9)\,, \varkappa(2) \boxplus \varkappa(8)\,, \varkappa(3) \boxplus \varkappa(7)\,, \varkappa(4) \boxplus \varkappa(6)\right) \\ &= 1 + \operatorname{lego}\left(0 \boxplus 5, 0 \boxplus 5, 1 \boxplus 4, 2 \boxplus 3\right) \\ &= 1 + \operatorname{lego}\left(5, 5, 5, 5\right) = 1 + 5 = 6\end{aligned}$$

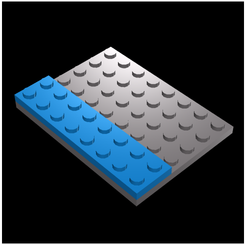
$$n \text{ jó állás} \iff n = 1, 2 \text{ vagy } n \equiv 1 \pmod 3$$

LEGO játék

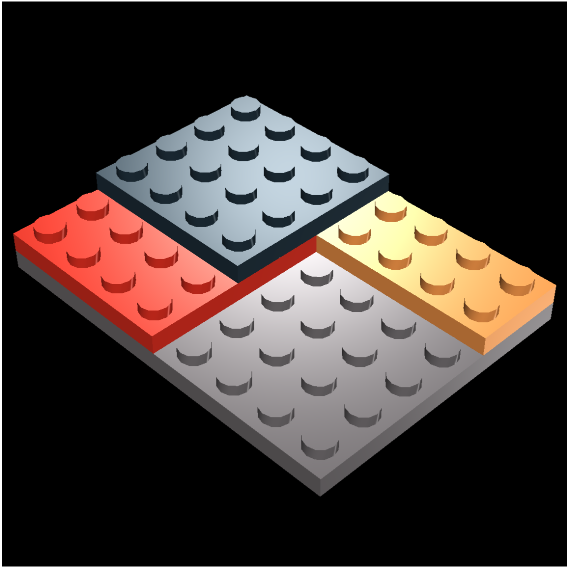








LEGO játék



LEGO$_+(h \leq \infty)$

8	1	1	1	1	1	1	1	1
7	0	1	0	1	0	1	0	1
6	1	1	1	1	1	1	1	1
5	0	1	0	1	0	1	0	1
4	1	1	1	1	1	1	1	1
3	0	1	0	1	0	1	0	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1
γ	1	2	3	4	5	6	7	8

(a, b) jó

$\Updownarrow$

ab páratlan

$\mathrm{LEGO}_{+}(h \leq \infty)$

8	1	1	1	1	1	1	1	1
7	0	1	0	1	0	1	0	1
6	1	1	1	1	1	1	1	1
5	0	1	0	1	0	1	0	1
4	1	1	1	1	1	1	1	1
3	0	1	0	1	0	1	0	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1
γ	1	2	3	4	5	6	7	8

$\gamma(a, b) =$

- 0, ha ab páratlan
- 1, ha ab páros

$\text{LEGO}_\wedge(h \leq \infty)$

8	1	3	3	5	5	5	5	6
7	1	3	3	4	4	4	4	5
6	1	3	3	4	4	4	4	5
5	1	3	3	4	4	4	4	5
4	1	3	3	4	4	4	4	5
3	1	2	2	3	3	3	3	3
2	1	2	2	3	3	3	3	3
1	0	1	1	1	1	1	1	1
$\varkappa$	1	2	3	4	5	6	7	8

$$(a, b) \ \text{jó}$$
$$\Updownarrow$$
$$\|a\| = \lfloor \log_2 a \rfloor = \lfloor \log_2 b \rfloor = \|b\|$$

Tétel

Egy állás akkor és csak akkor jó, ha a benne előforduló legkisebb oldalhossz fellép négyzetben (is). Speciálisan, az egyetlen $a \times b$ méretű téglalapból álló állás akkor és csak akkor jó, ha $\|a\| = \|b\|$.

$\mathrm{LEGO}_{\wedge}(h \leq \infty)$

8	1	3	3	5	5	5	5	6
7	1	3	3	4	4	4	4	5
6	1	3	3	4	4	4	4	5
5	1	3	3	4	4	4	4	5
4	1	3	3	4	4	4	4	5
3	1	2	2	3	3	3	3	3
2	1	2	2	3	3	3	3	3
1	0	1	1	1	1	1	1	1
$\varkappa$	1	2	3	4	5	6	7	8

$\varkappa(a, b) =$

- $2\|a\|$, ha $\|a\| = \|b\|$
- $2(\|a\| \wedge \|b\|) + 1$, ha $\|a\| \neq \|b\|$

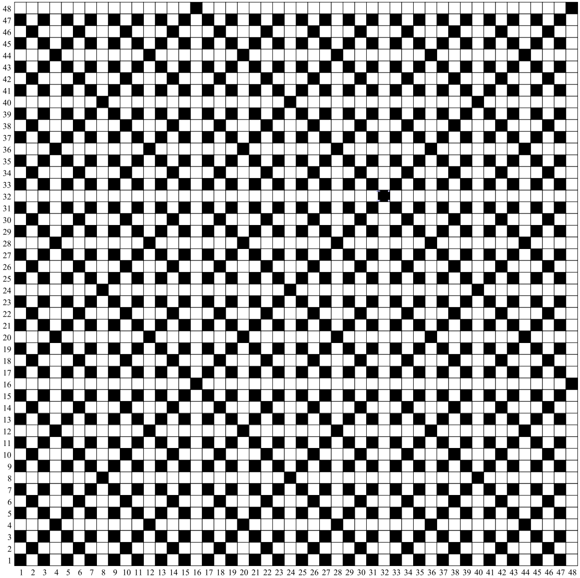
LEGO$_{\mathrm{V}}(h \leq \infty)$

8	7	13	23	29	39	45	55	62
7	6	13	20	27	34	41	48	55
6	5	10	17	21	29	34	41	45
5	4	9	14	19	24	29	34	39
4	3	5	11	14	19	21	27	29
3	2	5	8	11	14	17	20	23
2	1	2	5	5	9	10	13	13
1	0	1	2	3	4	5	6	7
$\varkappa$	1	2	3	4	5	6	7	8

(a, b) jó

$\Updownarrow$

$?\,(a) = ?\,(b)$


48 47 46 45 44 43 42 41 40 39 38 37 36 35 34 33 32 31 30 29 28 27 26 25 24 23 22 21 20 19 18 17 16 15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48

Tetszőleges a természetes számra legyen $\|a\| = n$, ha a kettes számrendszerbeli alakja n nullára végződik:

$$a = \cdots\ 1\,\overbrace{0\cdots0}^{n}.$$

A norma tulajdonságai

Minden $a \in \mathbb{N}$ esetén

1. $\nexists a_1, a_2 \colon a = a_1 + a_2$ és $\|a\| = \|a_1\| = \|a_2\|$;
2. $\forall k < \|a\|\ \exists a_1, a_2 \colon a = a_1 + a_2$ és $k = \|a_1\| = \|a_2\|$.

Tétel

Egy $a \times b$ méretű téglalap akkor és csak akkor jó, ha $\|a\| = \|b\|$. Egy állás akkor és csak akkor jó, ha minden darabja jó.

Bizonyítás.

jó$\xrightarrow{\forall}$rossz: ha $\|b\| = \|a\|$, akkor

1. $\nexists a_1, a_2 : a = a_1 + a_2$ és $\|b\| = \|a_1\| = \|a_2\|$.

rossz$\xrightarrow{\exists}$jó: ha $\|b\| < \|a\|$, akkor

2. $\exists a_1, a_2 : a = a_1 + a_2$ és $\|b\| = \|a_1\| = \|a_2\|$. $\square$

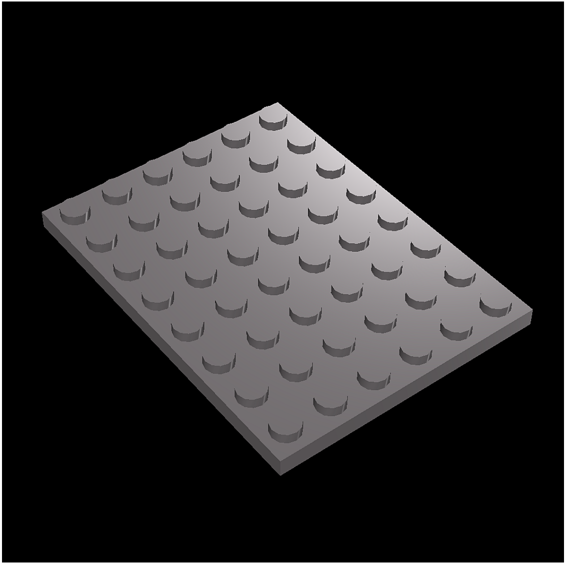
$\mathrm{LEGO}_{\mathrm{V}}(h \leq \infty)$

8	7	13	23	29	39	45	55	62
7	6	13	20	27	34	41	48	55
6	5	10	17	21	29	34	41	45
5	4	9	14	19	24	29	34	39
4	3	5	11	14	19	21	27	29
3	2	5	8	11	14	17	20	23
2	1	2	5	5	9	10	13	13
1	0	1	2	3	4	5	6	7
$\varkappa$	1	2	3	4	5	6	7	8

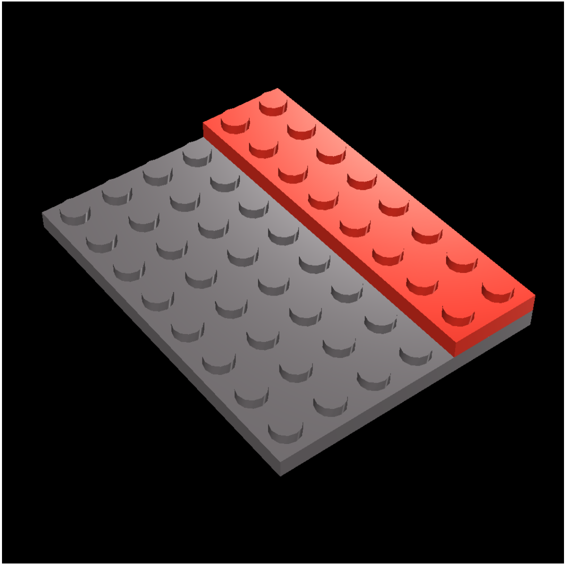
$\varkappa(a, b) =$

- $ab - 1$, ha $\|a\| = 0$ vagy $\|b\| = 0$
- $ab - 2$, ha $\|a\| = \|b\| \geq 1$
- $ab - 3$, egyébként

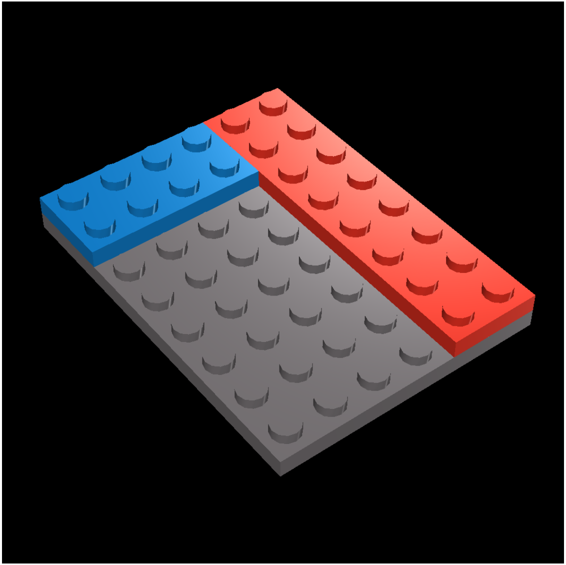
$\mathrm{LEGO_V}(h \leq 2)$



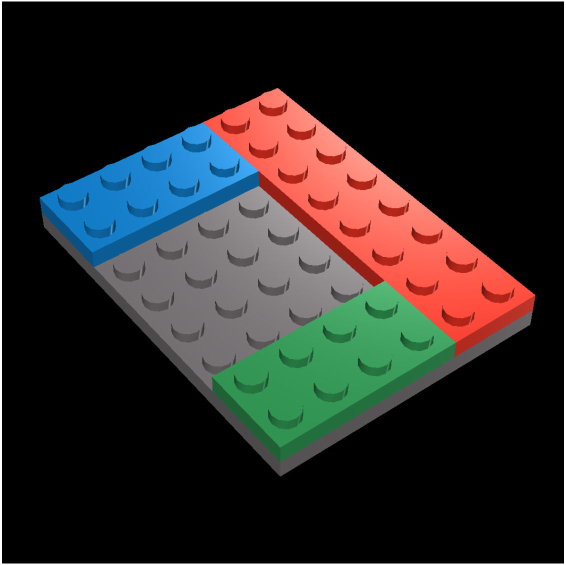
$\mathrm{LEGO}_{\mathrm{V}}(h \leq 2)$



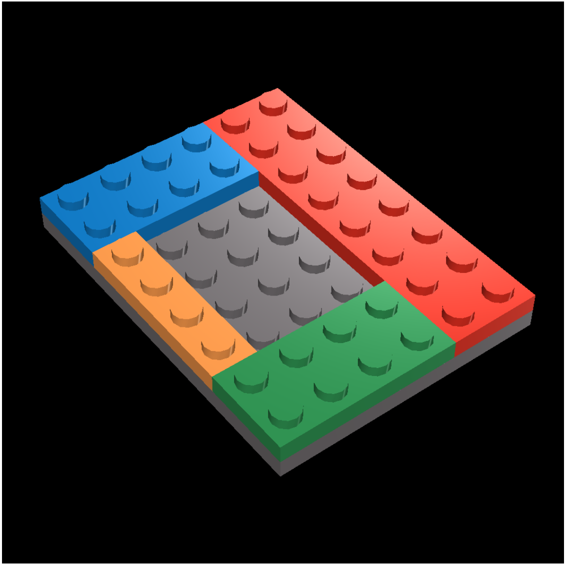
$\mathrm{LEGO}_{\mathrm{V}}(h \leq 2)$



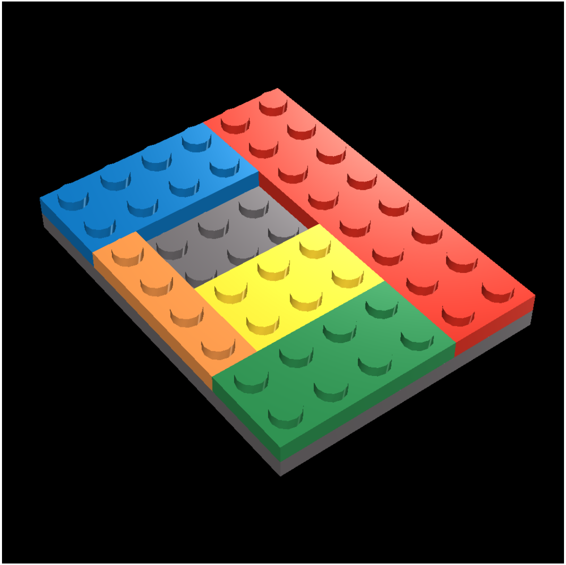
$\mathrm{LEGO}_{\mathrm{V}}(h \leq 2)$



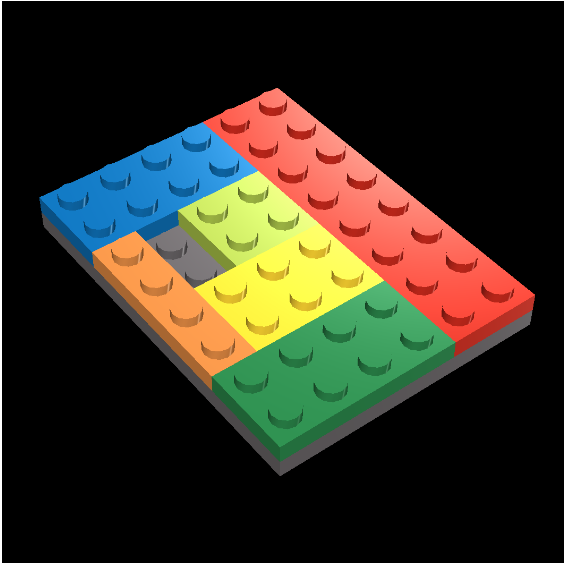
$\mathrm{LEGO}_{\mathrm{V}}(h \leq 2)$



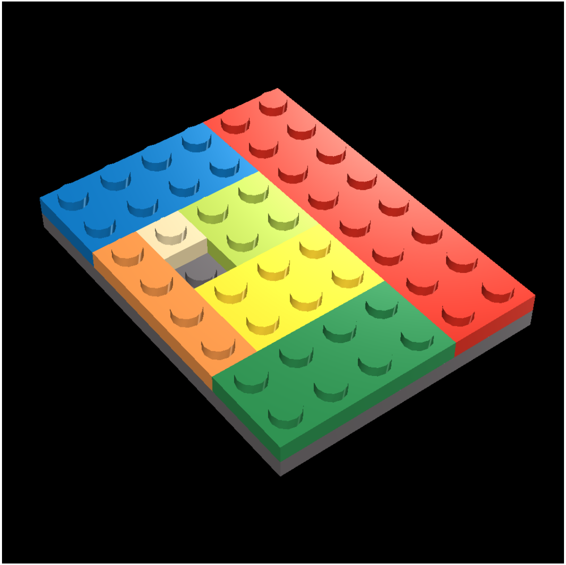
LEGO$_{\mathrm{V}}(h \leq 2)$



$\mathrm{LEGO}_{\mathrm{V}}(h \leq 2)$



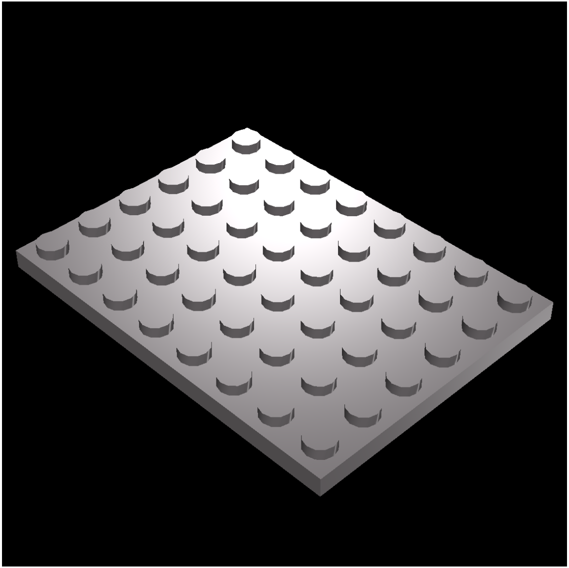
$\mathrm{LEGO}_{\mathrm{V}}(h \leq 2)$



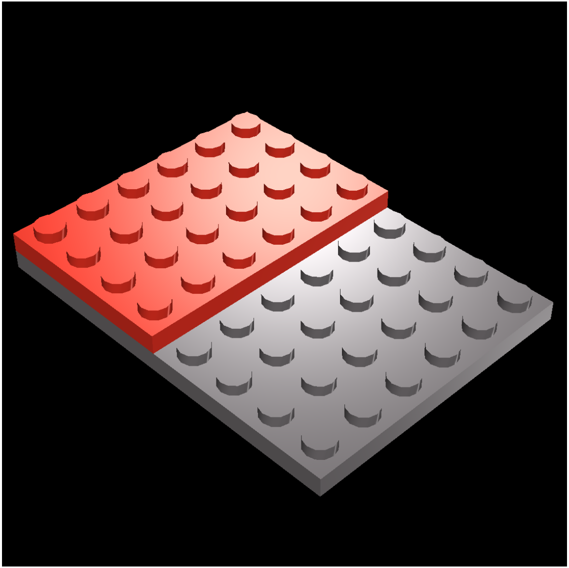
Tétel

Egy $a \times b$ *méretű téglalap akkor és csak akkor jó, ha* $a = b$*.*

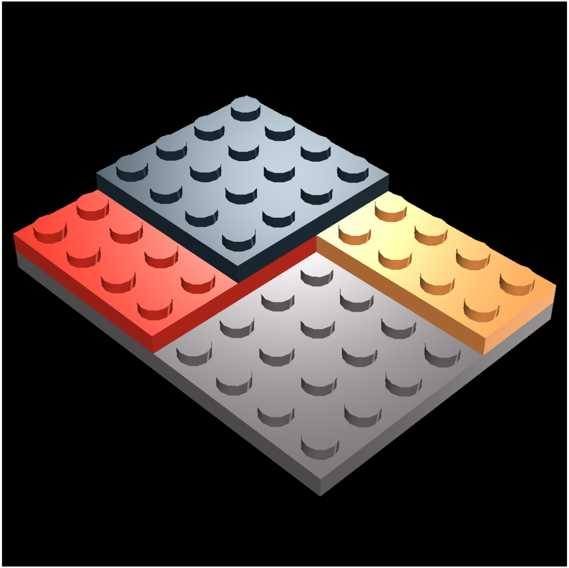
$\mathrm{LEGO}_{\mathrm{V}}(h \leq 3)$



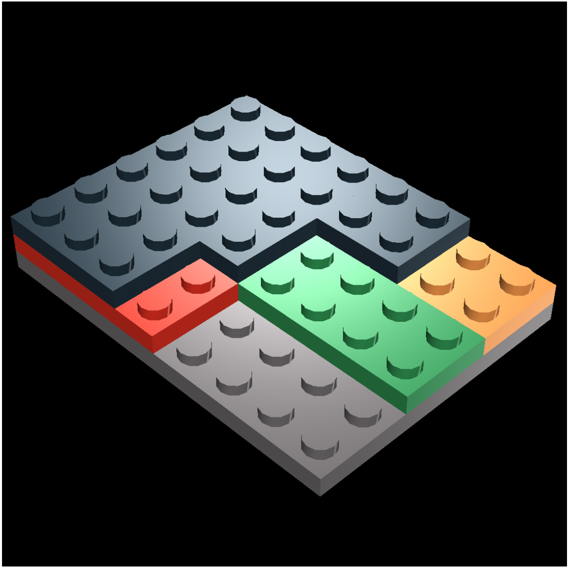
$\mathrm{LEGO}_{\mathrm{V}}(h \leq 3)$



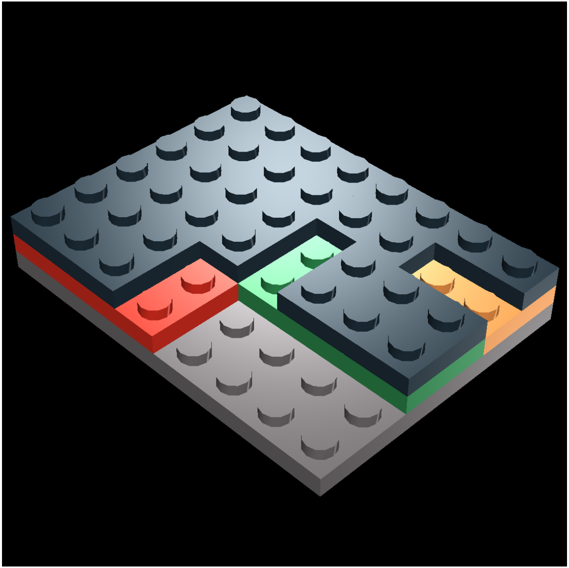
$\mathrm{LEGO}_{\mathrm{V}}(h \leq 3)$



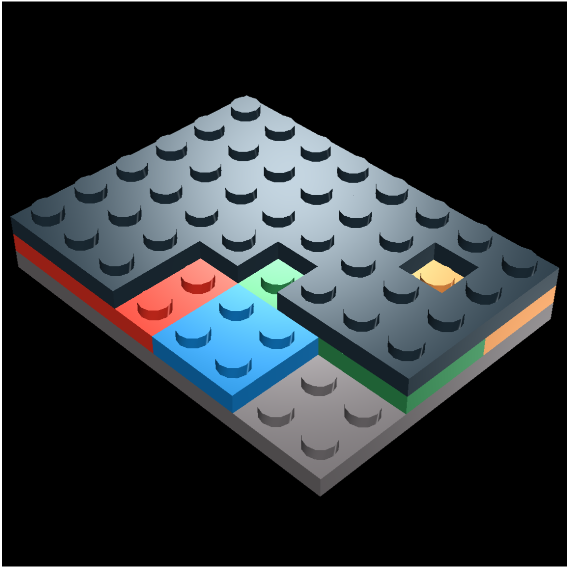
$\mathrm{LEGO}_{\mathrm{V}}(h \leq 3)$



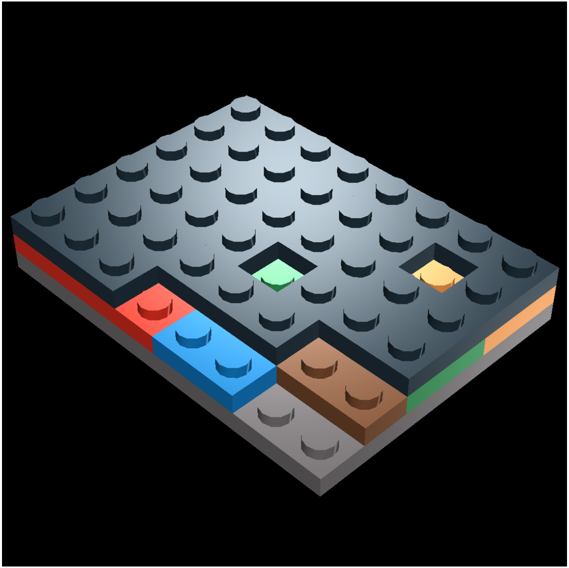
LEGO$_{\mathrm{V}}(h \leq 3)$



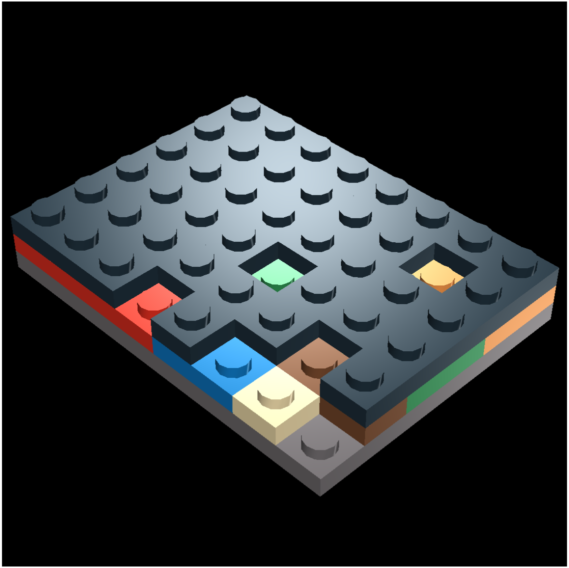
$\mathrm{LEGO}_{\mathrm{V}}(h \leq 3)$



$\mathrm{LEGO}_{\mathrm{V}}(h \leq 3)$

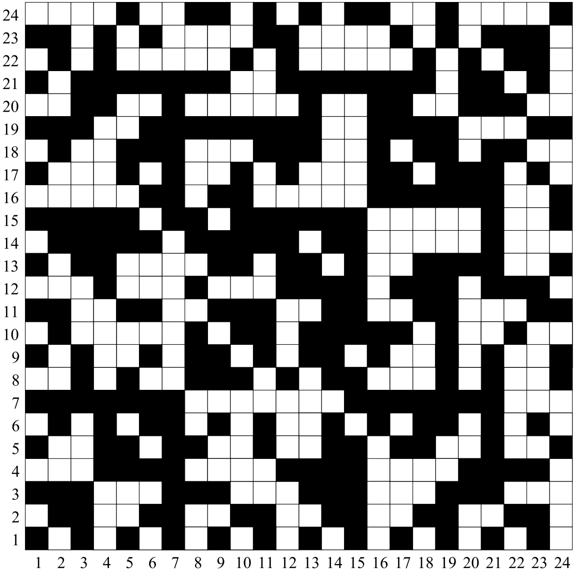


$\mathrm{LEGO}_{\mathrm{V}}(h \leq 3)$



Jó állások

$\mathrm{LEGO}_V(h \leq 3)$



Jó állások

Tétel

- *Egy $a \times b$ méretű téglalap a második rétegben akkor és csak akkor jó, ha $a = b$.*
- *Egy $a \times b$ méretű téglalap az első rétegben akkor és csak akkor jó, ha $\frac{a}{b}$ lánctörtjegyeinek összege páratlan.*
  (Más megfogalmazásban: az a és b számokon végrehajtott euklideszi algoritmusban fellépő hányadosok összege páratlan.)